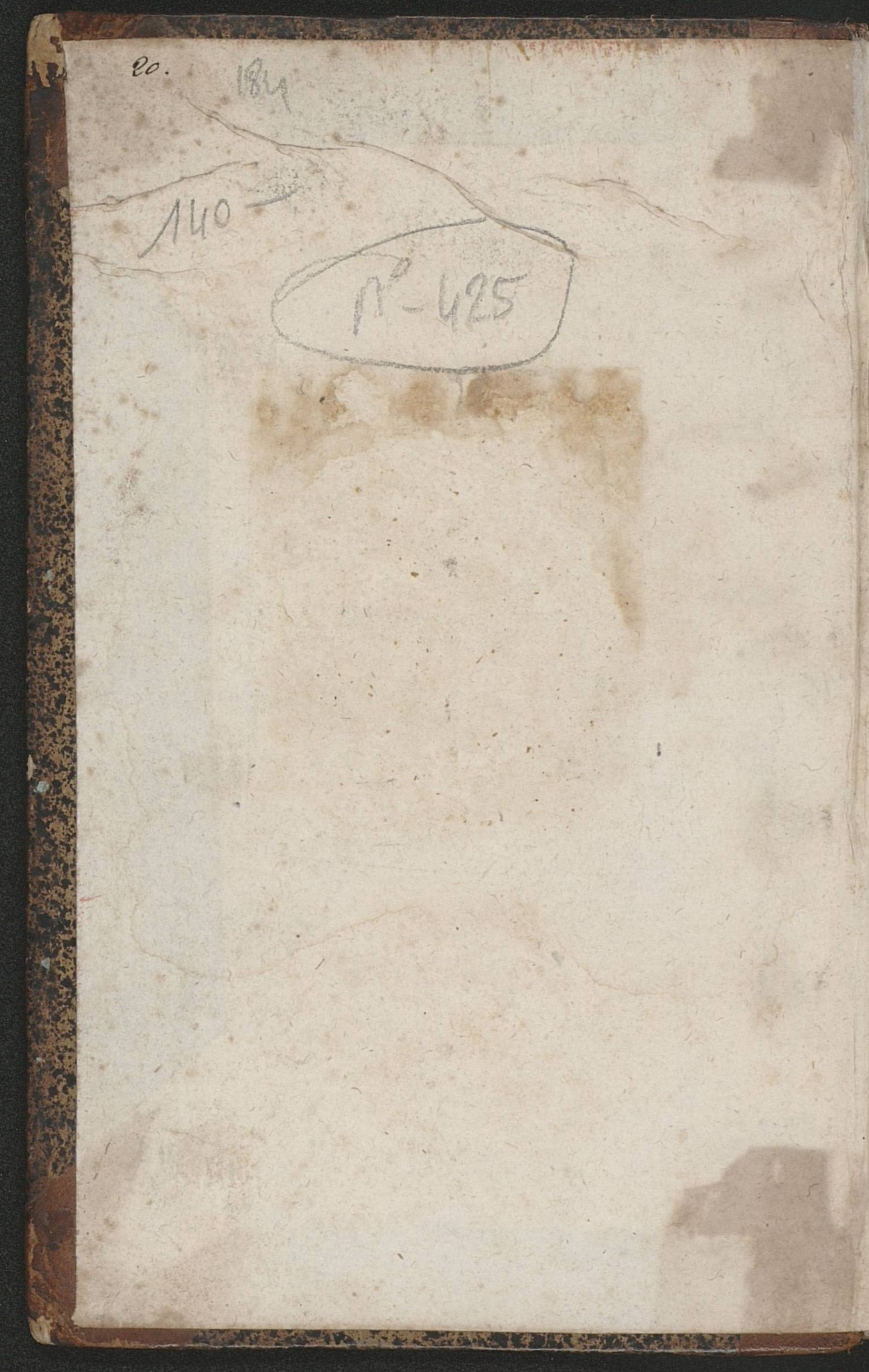



20.
184
140
N° 425

Gustave Müller.

Stud. Hum. 1876.

Edition originale

ÉLÉMENS D'ALGÈBRE.

Par M. CLAIRAUT,

De l'Académie Royale des Sciences, des Sociétés Royales de Londres, de Berlin, d'Upsal & d'Édimbourg, de l'Académie de l'Institut de Bologne.



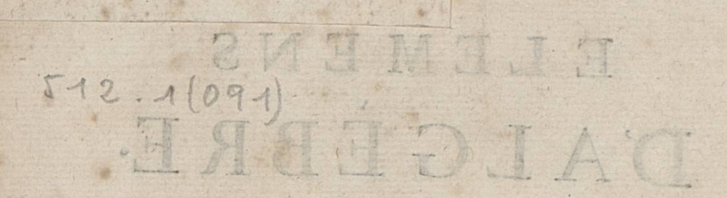
À PARIS,

Ruë Saint Jacques,

Chez { Les Freres GUERIN, à S. Thomas d'Aquin.
DAVID l'aîné, à la Plume d'or.
DURAND, au Griffon. }

M. DCC. XLVI.

AVEC APPROBATION ET PRIVILEGE DU ROI.



ELEMENS D'ALGÉBRE.

Par M. CLAIRAUT,

De l'Académie Royale des Sciences, des Sociétés Royales de Londres, de Berlin, d'Upsal & d'Edimbourg, de l'Académie de l'Institut de Bologne.



A PARIS,

Rue S. Jacques,

Chez { Les Freres GUERIN, à S. Thomas d'Aquin. David l'aîné, à la Plume d'or. DURAND, au Griffon.

M. DCC. XLVI.

AVEC APPROBATION ET PRIVILEGE DU ROI.



PREFACE.

JE me ſuis propoſé de ſuivre dans cet ouvrage la même méthode que dans mes Elémens de Géometrie : J'ai taché d'y donner les regles de l'Algebre dans un ordre que les Inventeurs euſſent pû ſuivre. Nulle vérité n'y eſt préſentée ſous la forme de Theoremes, toutes ſemblent être découvertes en s'éxerçant ſur les Problêmes que le beſoin ou la curioſité ont fait entreprendre de réſoudre.

Des problêmes utiles au commerce comme ceux où il eſt queſtion de partager des ſommes entre différentes perſonnes à raiſon de leurs miſes ou de quelques conventions faites entr'elles ; des regles d'alliage, &c. ſont les pro-

blêmes que je ſuppoſe avoir occupé les premiers Algébriſtes.

Je commence par donner la ſolution d'un des plus ſimples de ces Problêmes, telle qu'on la peut trouver ſans avoir aucune teinture de l'Algébre. Il eſt aiſé de reconnoître dans cette ſolution que ſi la mémoire ſuffit à retenir tous les raiſonnemens par leſquels il faut paſſer pour y arriver, c'eſt que la ſuite de ces raiſonnemens n'eſt pas bien longue ; & l'on voit en mêmetems que lorſqu'on s'éléve à des Problêmes qui en demandent une plus grande , il faut chercher à les écrire d'une maniere fort abrégée , il faut imaginer quelques ſignes à l'aide deſquels on puiſſe exprimer l'état où la difficulté eſt réduite à chaque pas qu'on fait pour la réſoudre. Cette maniere d'écrire les queſtions , eſt l'Algébre que je fais pour ainſi dire inventer au Lecteur.

Pour aller toujours du plus ſimple au plus composé , je ne propoſe d'abord que des queſtions numériques , parce que ce ſont celles qui fixent le plus l'eſprit des commençans. Après en avoir

résolu plusieurs qui ne différent les unes des autres que par les nombres donnés dans l'énoncé, on s'apperçoit aisément qu'il y a toujours une partie de l'opération qui se trouve commune dans chaque résolution, & qu'il seroit à souhaiter de ne faire qu'une seule fois; je saisis cette occasion d'expliquer la maniere de résoudre généralement les Problêmes, en employant au lieu des nombres donnés par les conditions, des lettres qui expriment toutes sortes de grandeurs : & je montre ensuite à tirer des solutions générales les solutions particulieres au moyen de la substitution des nombres à la place des lettres.

Parmi les différens Problêmes où j'employe des lettres au lieu de nombres, il s'en trouve d'assés compliqués pour ne pouvoir pas être résolus sans employer les regles d'addition, soustraction, multiplication & division : je montre alors comment on doit faire ces opérations. Je n'ai pas crû devoir les enseigner plûtôt, parce que les commençans les suivent avec peine & avec

dégoût lorſqu'on les leur enſeigne dans un tems où ils n'ont aucune idée des quantités ſur leſquelles ils operent.

La multiplication eſt de toutes ces opérations celle qui arrête ordinairement le plus les commençans, & dont l'explication embaraſſe le plus les maîtres ; ce principe qu'elle renferme, que deux quantités négatives donnent pour leur produit une quantité poſitive, eſt preſque toujours l'écueil des uns & des autres.

Pour éviter d'y tomber, je n'établis ce principe qu'après avoir fait faire des opérations dans leſquelles on a dû en remarquer la néceſſité. Je commence par enſeigner à multiplier une quantité compoſée de pluſieurs termes poſitifs & négatifs par un ſeul terme que je ſuppoſe toujours poſitif, parce que l'on ne s'accoutume pas ordinairement à conſidérer une quantité négative comme exiſtant ſeule. Cette multiplication étant expliquée, je paſſe à celle où le multiplicateur eſt auſſi bien que le multiplicande compoſé de pluſieurs termes poſitifs & négatifs, & je fais

voir facilement que cette opération n'eſt autre choſe que la premiere répétée autant de fois qu'il y a de termes dans le multiplicateur, & que ſuivant que les termes de ce multiplicateur ſont poſitifs ou négatifs, les produits qu'ils donnent doivent être ou ajoutés ou retranchés.

Par ce moyen je familiariſe les commençans avec la multiplication, ſans que j'aye ſeulement beſoin d'énoncer ces principes ordinaires, que *moins* par *plus* donne *moins*, *moins* par *moins* donne *plus*, &c. qui en préſentant à l'oreille une contradiction dans les mots, laiſſent preſque toujours croire qu'il y en a une dans la choſe.

On pourroit croire d'abord que je n'ai fait qu'éluder la difficulté, & je n'aurois fait réellement que l'éluder, ſi je ne parlois pas de la multiplication des quantités purement négatives, par d'autres quantités auſſi entierement négatives, opération dans laquelle on ne ſçauroit éviter la contradiction apparente dont je viens de parler. Mais je traite à fond de cette multiplication

après en avoir montré la néceſſité au Lecteur, en le conduiſant à un Problême où l'on eſt obligé de conſidérer des quantités négatives indépendamment d'aucunes quantités poſitives dont elles ſoient retranchées.

Lorſque je ſuis parvenu dans ce Problême au point où il s'agit de multiplier ou de diviſer des quantités négatives les unes par les autres, je prends le parti qu'ont ſans doute pris les premiers Analyſtes qui ont eu de ces opérations à faire, & qui ont voulu ſuivre une route entierement ſûre, je cherche une autre ſolution du Problême par laquelle je puiſſe éviter toute eſpéce de multiplication ou de diviſion de quantités négatives, par ce moyen j'arrive au réſultat ſans employer d'autres raiſonnemens que ceux ſur leſquels on ne peut former aucun doute; & je vois ce que doivent être ces produits ou quotients de quantités négatives que m'avoit donnés la premiere ſolution. Il n'eſt pas difficile enſuite d'en tirer ces principes ſi fameux que *moins* par *moins* donne *plus*, &c.

Je délivre ainsi ces principes de tout ce qu'ils ont de choquant, & le Lecteur parvient en même-tems à connoître la nature des solutions négatives des Problêmes, il apprend cette vérité si utile, que lorsque dans une solution on arrive à trouver l'inconnue négative, elle doit être prise dans un sens opposé à celui suivant lequel on l'avoit employée en exprimant les conditions du Problême.

La premiere Partie de cet ouvrage traite uniquement des équations du premier dégré, soit à une, soit à plusieurs inconnues, & de toutes les opérations que demandent ces équations, tant pour arriver à leur résolution, que pour la rendre aussi simple qu'elle puisse être. Telle est par exemple la regle qu'il faut suivre pour trouver le plus grand commun diviseur laquelle naît de la nécessité de réduire une fraction à sa plus simple expression. Cette regle est expliquée d'une maniere nouvelle, & j'y ai ajouté plusieurs réfléxions qui la rendent applicable à des cas où la maniere ordinaire de la traiter pourroit

rebuter par la longueur des calculs, & ne pas toujours donner la quantité qu'on cherche.

Dans la ſeconde Partie je parle des Equations du ſecond dégré, un Problême où il s'agit d'intérêt d'intérêts m'amene à une de ces Equations ; je l'ai choiſi de nature à donner pour ſes deux ſolutions deux nombres poſitifs, afin de mieux faire voir comment deux nombres différens réſolvent le même Problême. J'en ai uſé ainſi, de peur que les commençans qui ne regardent pas volontiers les racines négatives comme de véritables ſolutions, ne cruſſent que le Problême n'avoit réellement qu'une ſolution.

Afin cependant de les accoutumer aux racines négatives, je donne enſuite un Problême dans lequel il y a une de ces racines, & telle cependant qu'aucun commençant ne peut s'empêcher de voir qu'elle ſatisfait autant au Problême que la poſitive.

La réſolution des Equations que demandent ces Problêmes & ceux de même eſpéce qu'on peut ſe propoſer, en-

gagent les Lecteurs à apprendre plusieurs opérations essentielles de l'Algébre, telles que les extractions des racines quarrées, la réduction des radicaux, leurs additions, soustractions, &c. opérations qu'on donne d'ordinaire au commencement des Elémens d'Algébre, mais que mon Plan exigeoit de placer en ce lieu.

De ces opérations je passe à un Problême dans lequel on doit employer plusieurs Equations du second dégré contenant chacune plusieurs inconnues, & je donne les moyens de réduire toutes ces Equations à une seule qui ne contienne qu'une inconnue. Je fais voir en même-tems que cette méthode n'est pas seulement propre aux Equations où les inconnues ne montent qu'au second dégré, mais qu'elle s'étend à tous les dégrés.

La troisiéme Partie a pour objet les Equations de tous les dégrés prises en général; je traite du nombre de leurs racines, des propriétés que les coefficiens du second, du troisiéme, &c. terme ont d'être ou la somme des racines,

ou celle des produits de ces racines, &c. Je tire de ces propriétés la fameuſe regle de Deſcartes, pour trouver toutes les racines commenſurables qui ſont dans une Equation ; & comme cette méthode engage dans des calculs exceſſifs à cauſe du grand nombre de diviſions qu'il faut tenter, je donne la méthode de Mr Newton, qui s'étend non-ſeulement aux racines commenſurables ou diviſeurs d'une dimenſion, mais aux diviſeurs de tant de dimenſions que l'on veut. Je ne me contente pas de donner la démonſtration de cette méthode que Mr Newton avoit ſupprimée, mais je fais voir par quelle route il a pû la découvrir. C'eſt un avantage que je ne crois pas qu'on puiſſe trouver dans la démonſtration que Mr s'Graveſande en a donnée (dans ſon *Specimen commentarii in arithmeticam univerſalem*, inſéré à la fin de ſes Elémens d'Algebre) & qui eſt la ſeule que je ſache avoir été donnée malgré le grand nombre de traités d'Algebre qui ont parû depuis Mr Newton. J'ai appris cependant que le R. P. Jacquier, connu pour avoir com-

menté les recherches de Mr Newton les plus élevées avoit pris la peine de traiter celle-ci, mais ce qu'il a fait ſur cette matiere n'eſt pas venu à ma connoiſſance.

Au reſte dans cette Partie & dans celles qui ſuivent, je ne m'arrête pas, comme dans les deux précédentes, à montrer les Problêmes qui pourroient avoir conduit aux Equations que j'examine, parce que je ne crois plus avoir beſoin de ce motif pour exciter la curioſité des Lecteurs. Ils ont dû ſuffiſamment voir par les premiers Problêmes, de quelle importance il étoit de ſçavoir réſoudre toutes ſortes d'Equations.

Je traite dans la quatriéme Partie des Equations de tous les dégrés lorſqu'elles n'ont que deux termes, ou lorſqu'en ayant trois, elles ſe réduiſent à la méthode des Equations du ſecond dégré par une ſimple transformation. J'enſeigne par ce moyen aux commençans, un grand nombre d'opérations ſur les quantités radicales de toute eſpéce, & je leur donne une connoiſſance entiere de l'élévation des puiſ-

ſances, & de l'extraction des racines.

Une regle qui eſt abſolument néceſſaire pour la réſolution complette de ces Equations, & qui a toujours été omiſe dans tous les Auteurs Elementaires, (excepté Mr s'Graveſande) c'eſt l'extraction des racines des quantités en partie commenſurables, & en partie incommenſurables : Mr Newton à qui on doit cette regle, l'ayant donnée à ſon ordinaire ſans démonſtration, je l'ai traitée ici comme un Problême; par ce moyen la découverte & la démonſtration marchent toujours de concert.

La Méthode de Mr Newton s'étend aux quantités numériques quelque ſoit l'expoſant de la racine, mais elle ne s'applique pas aux quantités littérales, lorſque cet expoſant paſſe le ſecond dégré; je ſupplée ce qui manque à cette Méthode, en donnant le procédé qu'il faut ſuivre pour les quantités littérales. De plus je fais voir que la Méthode de Mr Newton, pour les quantités numériques, peut induire en erreur dans quelques occaſions, c'eſt lorſque la racine

d'une quantité contient des fractions quoique la quantité n'en contienne point. Je montre ce qu'il faut faire alors pour remédier à cet inconvenient.

Mr s'Gravesande qui a commenté l'article de l'Arithmétique universelle de Mr Newton, où se trouve cette Méthode, n'a point remarqué les cas qui peuvent y échapper, & il n'a point donné la maniere de l'appliquer aux quantités litterales de tous les dégrés.

Toutes ces opérations supposant dans le cas d'une puissance quelconque la formule du Binome, j'en donne une démonstration nouvelle, & je montre les différentes utilités qu'on peut tirer de cette formule, pour trouver par approximation toutes sortes de quantités composées à volonté de radicaux, de fractions, &c. ce qui peut préparer les commençans à l'analyse de l'infini.

La cinquiéme Partie traite des Equations du troisiéme & du quatriéme dégré qui ont tous leurs termes, c'est-à-dire, toute la complication qu'elles peuvent avoir. Je donne d'abord la solution générale des Equations du troi-

ſiéme dégré, & je fais voir enſuite les Equations particulieres, où cette ſolution n'apprend point la valeur de l'inconnue, ce qui forme le cas qu'on appelle irréductible. Dans ces Equations au défaut des racines exactes, j'apprends à en trouver par approximation; je donne pour y parvenir une méthode nouvelle beaucoup plus ſimple que celles qui ont parû juſqu'à préſent. Par cette méthode dès la premiere opération, j'ai la valeur de la racine cherchée à un millieme près, & à la ſeconde à un millionieme, & ainſi de ſuite.

Je paſſe de-là aux Equations du quatriéme dégré, & après avoir donné leur réſolution générale, Je fais voir que cette réſolution, ainſi que celle des Equations du ſecond dégré, a cet avantage ſur la réſolution des Equations du troiſiéme, qu'une ſeule & même formule peut à l'aide des ſignes plus & moins exprimer toutes les racines de l'Equation. Je démontre auſſi, ce que tous les Auteurs Elémentaires n'ont fait que ſuppoſer que les quatre racines d'une Equation du quatriéme dégré, ſont

toujours ou toutes quatre réelles, ou toutes quatre imaginaires, ou deux réelles, & deux imaginaires; c'est-à-dire, que je prouve que les racines imaginaires des Equations du quatriéme dégré, peuvent, ainsi que celles du second, être regardées comme composées d'une partie réelle, & d'une partie qui est la racine quarrée d'une quantité négative.

La résolution des Equations du quatriéme dégré étant fondée sur celle des Equations du troisiéme, elle a de même que ces Equations cet inconvénient, que dans un cas on ne sçauroit avoir les racines que par approximation. Je donne une maniere bien simple de trouver cette approximation en employant celle que j'avois donnée précédemment pour les Equations du troisiéme dégré.

Quant aux Equations qui passent le quatriéme dégré, je ne donne rien pour leur résolution en général, parce que jusqu'à présent on n'a pû y parvenir quelques efforts qu'ayent fait les Analystes. L'on est réduit, excepté quelques cas particuliers que j'ai traités, pour la plûpart, dans la troisiéme & quatriéme

partie, à de ſimples approximations, & comme ces approximations ſont beaucoup plus faciles lorſqu'on eſt aidé de la Géometrie, je remets à traiter de ces Equations, lorſque j'enſeignerai la Theorie des lignes courbes.

On devoit s'attendre après ce que j'avois dit en annonçant mes Elémens d'Algebre, à y trouver des applications de cette ſcience à la Géometrie, j'ai crû cependant devoir les réſerver pour un autre ouvrage. Il m'a parû qu'en donnant un traité entier de pure Algebre, c'étoit offrir aux commençans les moyens de s'y fortifier davantage, & qu'ils gagneroient à ne l'appliquer à la Géometrie, que lorſque les opérations Analytiques ne leur couteroient plus. J'eſpere que les Principes qu'ils trouveront dans cet ouvrage, les mettront en état de ſurmonter les plus grandes difficultés qu'ils rencontreront dans la haute Géometrie.

Au reſte, je ne ſuppoſe pour l'intelligence de ce traité, que les opérations principales de l'Arithmetique, parmi leſquelles je compte la regle de trois,

trois ; ceux qui auront lû mes Elemens de Géometrie poſſederont la théorie des proportions autant qu'il eſt néceſſaire pour entendre tout ce que je dis ici. J'avois d'abord compté donner dans le même Livre tant les Elemens d'Arithmetique que ceux d'Algebre, & je n'aurois pas manqué alors de traiter des proportions plus à fond que je n'ai fait dans mes Elemens de Géometrie, mais l'ordre que j'ai ſuivi m'a parû demander de traiter ſéparément ces deux Sciences. En effet, voulant me rapprocher autant qu'il eſt poſſible du chemin des Inventeurs, j'ai dû ſuppoſer l'Arithmetique familiere à ceux qui vouloient pénetrer dans l'Algebre.



ELEMENS D'ALGEBRE.

PREMIERE PARTIE.

De la Méthode Algebrique d'exprimer les Problêmes par des Equations, & de la résolution des Equations du premier dégré.



PARMI les différens Problêmes dont les premiers Mathématiciens qui ont eu le nom d'Algebriſtes ſe ſont occupés, je choiſis celui-ci, comme un des plus propres à faire voir comment ils ſont parvenus à former la Science qu'on nomme Algebre ou Analyſe.

I.

Partager une ſomme, par exemple 890 ₶

Exemple d'un Problême semblable à ceux que les premiers Algebristes ont pû se proposer.

à trois personnes, ensorte que la premiere ait 180 ℔ de plus que la seconde, & la seconde, 115 ℔ de plus que la troisiéme.

Voici d'abord comme j'imagine qu'aura raisonné un homme, qui, sans aucune teinture de l'Algebre, sera parvenu à résoudre ce Problême.

Solution de ce Problême telle qu'on la pourroit trouver sans Algebre.

Il est évident que si on connoissoit une des trois parts, on connoîtroit aussi-tôt les deux autres, supposons, par exemple, qu'on connoisse la troisiéme qui est la plus petite, il faudra y ajouter 115 ℔, & l'on aura la valeur de la seconde; ensuite pour avoir la premiere, il faudra ajouter 180 ℔ à cette seconde, ce qui revient au même que si on ajoutoit 180 ℔ plus 115 ℔ ou 285 ℔ à la troisiéme.

Quelle que soit la troisiéme part, nous sçavons donc que cette part, plus elle-même avec 115 ℔ plus encore elle-même avec 295 ℔ doit faire une somme égale à 890 ℔.

De-là, il suit que le triple de la plus petite part, plus 115 ℔ plus 295 ℔ ou en une fois plus 410 ℔ est égal à 890 ℔.

Or, si le triple de la part qu'on cherche plus 410 ℔ est égal à 890 ℔, il faut donc que ce triple de la part qu'on cherche soit plus petit que 890 ℔ de 410 ℔. Donc ce triple de la plus petite part est égal à 480 ℔. Donc la plus petite part est égale à 160 ℔.

La seconde sera par conséquent de 275 ℔, & la premiere ou la plus grande de 450 ℔.

C'est vraisemblablement ainsi que les pre-

miers Algebriſtes ont raiſonné quand ils ſe ſont propoſés de pareilles queſtions, ſans doute qu'à meſure qu'ils avançoient vers la ſolution d'une queſtion, ils chargeoient leur memoire de tous les raiſonnemens qui les avoient conduits au point où ils en étoient, & lorſque les queſlions n'étoient pas plus compliquées que la précédente, il n'y avoit pas de quoi ſe rebuter, mais dès que leurs recherches ont offert plus d'idées à retenir, il a fallu qu'ils cherchaſſent une maniére plus courte de s'exprimer, qu'ils euſſent quelques ſignes ſimples, avec leſquels quelqu'avancés qu'ils fuſſent dans la ſolution d'un Problême, ils puſſent voir d'un coup d'œil ce qu'ils avoient fait & ce qui leur reſtoit à faire. Or l'eſpece de langage particulier qu'ils ont imaginé pour cela, c'eſt l'Algebre.

II.

Pour mieux donner les principes de cette Science, nous allons reprendre la même queſtion, nous écrirons en langage ordinaire les raiſonnemens que l'Algebriſte fait pour réſoudre ſon Problême & en caracteres Algebriques, ce qu'il lui ſuffit d'écrire pour aider ſa memoire.

Méthode Algebrique d'exprimer le Problême précedent.

La plus petite ou la troiſiéme part, quelle qu'elle ſoit, je l'exprime par une ſeule lettre qui ſera par exemple. x

La ſeconde ſera par conſequent x plus 115, ce que j'écris ainſi . . . . $x + 115$, choiſiſſant le ſigne + qu'on prononce *plus* pour déſigner l'Addition des deux quantités entre leſquelles on le place.

Le ſigne + indique l'addition.

Quant à la premiere part ou la plus grande,

comme elle ſurpaſſe la ſeconde de 180 elle ſera donc exprimée par . . . . $x+115+180$

Ajoutant ces trois parts, on aura . . . . $3x+115+115+180$

ou en réduiſant . . . . $3x+410$

Le ſigne = marque l'égalité.

Mais cette ſomme des trois parts doit égaler 890 ₶ ce que j'exprime ainſi. . $3x+410=890$

Employant le caractere = qui ſe prononce *égal* pour exprimer l'égalité des deux quantités entre leſquelles on le place.

La queſtion, par ce Calcul, eſt donc changée en une autre, où il s'agit de trouver une quantité dont le triple étant ajouté avec 410 faſſe 890

Une Equation eſt l'égalité de deux quantités.

Trouver la réſolution de ſemblables queſtions, c'eſt ce qu'on appelle réſoudre une Equation, l'Equation dans ce cas ci eſt $3x+410=890$ on l'appelle ainſi, parce qu'elle indique l'égalité de deux quantités, réſoudre cette Equation, c'eſt trouver la valeur de l'inconnue x par cette condition que ſon triple plus 410 faſſe 890

On reſout une Equation lorſqu'on trouve la valeur de l'inconnue qu'elle renferme.

III.

Réſolution de l'Equation qui exprime le problême précédent.

Pour réſoudre cette Equation, voici comment l'Algebriſte raiſonne, & comment il écrit ſes raiſonnemens. L'Equation à réſoudre . . . . $3x+410=890$ m'apprend qu'il faut ajouter . . . . 410 à $3x$ pour faire la ſomme de 890, donc $3x$ ſont moindres que 890 de 410, ce que j'écris ainſi . . . . $3x=890-410$

Le caractere − indique la Souſtraction.

Prenant le caractere — qui ſe prononce *moins* pour faire reſſouvenir que la quantité qu'il précede doit être retranchée de celle qu'il ſuit.

De cette nouvelle Equation $3x=890-410$

on tire, en retranchant en effet 410 de 890, cette autre Equation $3x=480$.

Mais ſi trois x valent 480, un x vaut donc le tiers de 480 ou 160 ce que j'écris ainſi, $x=\frac{480}{3}=160$, & la queſtion eſt réſolue, puiſqu'il ſuffit de connoître une des parts pour connoître les autres.

I V.

Si on avoit voulu réſoudre la queſtion en commençant par chercher la plus grande part, on l'auroit pû de même. Autre ſolution du Problême précédent.

Voici comment on s'y ſeroit pris.

Soit cette premiere part . . . . y

La ſeconde ayant 180 de moins ſera $y-180$

Et la troiſiéme ayant 115 de moins que la ſeconde ſera . . . . $y-180-115$

Or la ſomme de ces trois quantités eſt . . . . $3y-180-180-115$

c'eſt-à-dire . . . . $3y-475$

Mais cette ſomme doit égaler 890

On a donc l'Equation $3y-475=890$ qui apprend que $3y$ ſurpaſſent 890 de 475, puiſqu'il faut retrancher 475 de $3y$ pour avoir 890. Donc $3y=890+475$ ou $3y=1365$.

Donc y ou la plus grande part $=455$ comme ci-deſſus.

V.

Si dans le Problême il avoit fallu partager une ſomme plus ou moins grande que celle qu'on a employée, & que les différences euſſent été d'autres nombres que ceux dont on s'eſt ſervis, il eſt évident qu'on l'auroit réſolu de la même maniere. Suppoſons, par exemple, que

le Problême eut été énoncé ainsi.

Autre exemple du Problême précédent.

Partager 9600 à quatre personnes, ensorte que la premiere ait 300 de plus que la seconde, & la seconde 250 de plus que la troisiéme, & la troisiéme 200 de plus que la quatriéme.

On auroit raisonné de la maniere suivante:

En nommant la quatriéme part x

La troisiéme sera . . . . . . $x+200$

La seconde . . . . $x+200+250$

La premiere . . . . $x+200+250+300$

Or la somme de toutes ces parts doit être égale à 9600. On a donc l'Equation.

$$4x+1400=9600.$$

Pour résoudre cette Equation, je remarque comme dans la précédente, que si $4x$ ne sont égaux à 9600 que lorsqu'on leur a ajouté 1400, il faut qu'ils soient égaux à ce qu'il reste de 9600 lorsqu'on en a retranché 1400, ce que l'on écrit ainsi, . . $4x=9600-1400$ ou $4x=8200$.

Mais si quatre x sont égaux à 8200, un x vaut donc le quart de 8200, c'est-à-dire que $x=\frac{8200}{4}=2050$, la plus petite part x étant connue les autres se trouvent tout de suite, la troisiéme $=2250$, la seconde $=2500$, & la premiere $=2800$.

VI.

Le Problême pourroit être encore plus varié & dépendre toujours des mêmes principes; supposons, par exemple, qu'il fut énoncé ainsi.

Troisiéme exemple du Problême précédent.

Partager 5500 en deux parties de maniere que la premiere ait un tiers de plus que la se-

conde, plus encore 180.

Voici comment on le résoudroit.

Soit la seconde part x

On aura pour la premiere $x + \frac{1}{3}x + 180$.

Or comme leur somme doit égaler 5500, on a donc l'Equation $2x + \frac{1}{3}x + 180 = 5500$. Pour résoudre cette Equation je commencerai par ajouter $2x$ avec $\frac{1}{3}x$ ce qui me donne $\frac{7}{3}x$ parce que deux entiers valent six tiers, & que par conséquent ces deux entiers avec un tiers font sept tiers. Donc l'Equation précédente se réduit à . . . . $\frac{7x}{3} + 180 = 5500$ qui deviendra par le même raisonnement que dans les exemples précédens $\frac{7x}{3} = 5500 - 180$

ou $\frac{7x}{3} = 5320$.

Or si le tiers de $7x$ vaut 5320 les $7x$ entiers valent donc trois fois davantage, ce que l'on écrit ainsi . . . . $7x = 5320 \times 3$. Employant le signe $\times$ qui se prononce *par* pour désigner la multiplication des deux quantités qu'il sépare.

Le signe $\times$ indique la multiplication.

Ensuite au lieu de $7x = 5320 \times 3$ il suffit d'écrire $7x = 15960$ que l'on a en multipliant en effet 5320 par 3.

Et par le moyen de cette nouvelle Equation on a $x = \frac{15960}{7} = 2280$ valeur de la seconde part.

La premiere part sera aisée à trouver ensuite, puisqu'il ne faudra qu'ajouter à cette quantité 2280 son tiers 760 & de plus 180, ainsi qu'on l'avoit proposé, & l'on aura 3220 pour la premiere part.

Les commençans pourront s'exercer à va-

rier encore davantage l'enoncé du Problême précédent, & à le résoudre dans les différens cas qu'ils imagineront, ils seront récompensés de leurs peines par la facilité qu'ils acquerront. Afin de les aider davantage, je vais donner un autre Problême qui a encore beaucoup de rapport avec le précédent.

VII.

Nouveau Problême de même nature que le précédent.

Trois Marchands font une Société, le premier fournit 17000 ℔ *le second* 13000 ℔, *le troisiéme* 10000; *comme ils ont besoin de quelqu'un qui se donne les soins que demande leur commerce, celui qui n'a mis que* 10000 ℔ *se charge de toutes les affaires, à condition qu'il tirera de plus que les autres* 3 *pour* 100 *de tout le gain qui se fera: Il arrive que ce gain monte à* 100000 ℔ *on demande ce qu'il faut qu'ils en ayent chacun.*

Soit la part du premier x

Le second ayant mis moins dans la raison de 13 à 17 doit avoir une somme moindre dans cette même raison, c'est-à-dire seulement . . . . $\frac{13}{17}x$

Le troisiéme en supposant qu'il n'eut qu'à raison de sa mise auroit les $\frac{10}{17}$emes du premier, mais devant avoir de plus 3 pour 100 sur tout, c'est-à-dire 3000 ℔ sa part sera. . . . . $\frac{10}{17}x + 3000$

Et comme la somme de ces trois parts doit être 100000 ℔ on aura . . . . . $x + \frac{13}{17}x + \frac{10}{17}x + 3000 = 100000$

ou $x + \frac{13}{17}x + \frac{10}{17}x = 97000$

Pour dégager l'inconnue de cette équation soit consideré que $x + \frac{13}{17}x + \frac{10}{17}x$ ou $\frac{17}{17}x + \frac{13}{17}x + \frac{10}{17}x$

ne signifie autre chose que $\frac{40}{17}x$ on a donc $\frac{40}{17}x = 97000$ ou $40x = 97000 \times 17$ ou $40x = 1649000$ ou $x = \frac{1649000}{40} = 41225$.

La part du premier étant trouvée celle du second exprimée par $\frac{13}{17}x$ sera $\frac{13}{17} \times 41225$, c'est-à-dire 31525, celle du troisiéme exprimée par $\frac{10}{17}x + 3000$ sera $\frac{10}{17} \times 41225 + 3000 = 27250$.

VIII.

Par ces deux Problêmes les Lecteurs entrevoyent ce que c'est que l'Algebre, & ils apprennent qu'en géneral la solution d'un Problême est composée de deux parties; dans la premiere on nomme par une lettre comme x ou y &c. la quantité inconnue qu'on cherche, ou une de celles qui étant connue, détermineroit les autres, on tâche ensuite d'arriver à une Equation où l'inconnue se trouve, ce qui se fait en exprimant de deux manieres différentes une même quantité.

La solution analytique d'un Problême a deux parties.

Dans la premiere on exprime ce Problême par une Equation.

Dans la seconde partie il s'agit de dégager l'inconnue de l'Equation.

Dans la seconde on résout cette Equation.

La premiere de ces deux parties est difficile à réduire en préceptes clairs pour les commençans, ce ne peut-être que par des exemples qu'on la fasse bien sentir.

Quant à la seconde on la peut beaucoup plus aisément expliquer d'une maniere génerale.

IX.

Dans les questions que nous venons de résoudre on est arrivé à des Equations dans lesquelles l'inconnue ne se trouvoit pas autrement engagée que par la multiplication ou la division de nombres connus; on appelle ces

Les Equations du premier dégré sont celles, où l'inconnue n'est

multipliée ou divisée que par des quantités connues.

sortes d'Equations, Equations du premier dégré, telles sont $2x - 10 = 56$, $\frac{2}{3}x + 15 = x - \frac{1}{5}x + 30$ &c. Et les Problêmes qui conduisent à ces Equations sont nommés des Problêmes du premier dégré.

On les appelle ainsi pour les distinguer de ceux dans lesquels l'inconnue seroit ou quarrée, * ou cubée, &c. qu'on dit être, aussi bien que leurs Equations, du second dégré si l'inconnue est quarrée, du troisiéme si l'inconnue est cubée &c.

Qu'on demandât, par exemple un nombre dont le triple étant ajouté avec le quarré, donnât 65 le Problême qu'il faudroit résoudre alors seroit du second dégré. Et l'Equation $3x + xx = 65$ (dans laquelle xx désigne le quarré de x) qui exprimeroit les conditions de ce Problême seroit une Equation du second dégré.

On n'a pû parvenir à la résolution de ces Equations qu'après s'être exercé long-tems aux Equations du premier dégré. Nous allons donc chercher toutes les regles que demandent celles-ci.

X.

Pour les trouver reprenons d'abord l'Equation $4x + 1400 = 9600$ traitée Art. V, laquelle

* On doit avoir vû en Arithmetique qu'un nombre est quarré ou cubé, suivant qu'il est multiplié une ou deux fois par lui-même. On quarre 7 par exemple lorsque, en le multipliant par lui-même, on en forme 49, de même on le cube lorsque le multipliant deux fois par lui-même on en forme 343.

est composée des trois termes $4x$, 1400, 9600, (on appelle ainsi toutes les parties d'une Equation separées les unes des autres par les signes $+$ ou $-$) & remarquons que par le même raisonnement, par lequel nous en avons tiré que $4x=9600-1400$, nous pourrons dans toutes sortes d'Equations prendre quelque terme que ce soit précedé du signe $+$ & le passer de l'autre côté du signe $=$ en lui donnant le signe $-$. Qu'on ait par exemple $50+\frac{10}{3}x=5x+30$ il sera permis de passer le terme $\frac{10}{3}x$ en $-$ de l'autre côté & écrire ainsi l'Equation $50=5x+30-\frac{10}{3}x$, car on peut dire comme dans l'Art. V. que puisqu'il faut ajouter $\frac{10}{3}x$ à 50 pour être égal à la quantité $5x+30$, il faut donc que 50 soit plus petit que $5x+30$ de la quantité $\frac{10}{3}x$ c'est-à-dire qu'il soit égal à $5x+30-\frac{10}{3}x$.

Les termes d'une Equation sont ses parties séparées par les signes $+$ ou $-$

De la même maniere qu'on a vû Art. III. que l'Equation $3y-475=890$ se changeoit en $3y=890+475$, on verra qu'en géneral les termes qui sont en $-$ d'un côté du signe d'Egalité peuvent être passés en $+$ de l'autre. Qu'on ait par exemple $32-6x=9x+119$ on en tirera $32=6x+9x+119$. Car si 32 doit être diminué de $6x$ pour égaler $9x+119$, il faut qu'il soit plus grand de $6x$ que cette quantité, c'est-à-dire qu'il soit égal à $6x+9x+119$.

XI.

Voilà donc un principe géneral pour toutes les Equations, c'est que les termes que l'on voudra pourront être passés d'un côté de l'Equation à l'autre, en observant de changer leurs signes. Or ce principe est d'une utilité infinie

Tout terme peut être passé d'un côté de l'Equation à l'autre en changeant de signe.

en ce qu'il épargne beaucoup de raiſonnemens.

XII.

Par ſon moyen on peut toujours changer une Equation en une autre, où l'on ait d'un côté du ſigne $=$, c'eſt-à-dire dans l'un des membres de l'Equation les termes affectés de x & de l'autre côté du ſigne $=$ c'eſt-à-dire dans l'autre membre de l'Equation tout ce qui eſt entierement connû.

On appelle membres d'une Equation ſes deux parties ſéparées par le ſigne $=$

Que l'on ait par exemple l'Equation $8x + 30 = \frac{5}{3}x + 250$; j'en tire $8x - \frac{5}{3}x = 250 - 30$; que l'on ait $60 - \frac{5}{4}x = 250 - \frac{7}{3}x$, on en tire $\frac{7}{3}x - \frac{5}{4}x = 250 - 60$ & ainſi des autres.

XIII.

Lorſqu'après les tranſpoſitions néceſſaires, on aura fait paſſer tous les termes affectés de x d'un côté & les termes connus de l'autre; ce qui ſe préſente le plus naturellement c'eſt de réduire chacun des deux membres de l'Equation à ſa plus ſimple expreſſion. Qu'on ait par exemple $8x - \frac{5}{3}x = 250 - 30$ on en tire auſſitôt $\frac{19}{3}x = 220$, en retranchant en effet 30 de 250, & en retranchant auſſi $\frac{5}{3}x$ de $8x$ ou de $\frac{24}{3}x$ qui lui eſt égal.

Qu'on ait $\frac{7}{3}x - \frac{5}{4}x = 250 - 60$ on la change en $\frac{13}{12}x = 190$ à cauſe qu'en reduiſant $\frac{7}{3}x$ & $\frac{5}{4}x$ au même dénominateur on a $\frac{28}{12}x$ & $\frac{15}{12}x$ dont la différence eſt $\frac{13}{12}x$, & qu'en retranchant 60 de 250 il reſte 190.

XIV.

Par de ſemblables réductions qui ſont toujours faciles à ceux qui ſçavent l'Arithmetique on changera toutes les Equations du premier

dégré, quelques composées qu'elles soient en d'autres qui n'auront que deux termes, l'un étant composé d'un certain nombre d' x entier ou rompû, l'autre étant un terme entierement connû, telles que sont les Equations $4x = 8200$, $\frac{7}{3}x = 5320$ & résolues dans les Articles V. & VI.

Rappellons nous maintenant ce que nous avons dit sur ces Equations, & nous en tirerons des principes généraux pour toutes les autres.

De l'Equation $4x = 8200$ nous avons tiré $x = \frac{8200}{4}$ parce qu'il s'ensuivoit de ce que quatre x valoient 8200, qu'un x ne pouvoit valoir que le quart de cette somme, de ce raisonnement & de ceux que l'on formeroit pareillement pour les autres nombres d'x, on tire ce principe général, qu'on peut ôter le multiplicateur qui affecte l'inconnue dans un des membres de l'Equation, en le faisant servir de diviseur à l'autre membre. Maniere de faire évanouir le multiplicateur qui affecte l'inconnue.

XV.

De l'Equation $\frac{7}{3}x = 5320$ nous avons tiré $7x = 3 \times 5320$ en remarquant que si le tiers de $7x$ vaut 5320, $7x$ entiers doivent valoir trois fois davantage. Delà on forme ce principe général, que pour faire disparoître le diviseur qui affecte l'inconnue dans un membre de l'Equation, on n'a qu'à le faire servir de multiplicateur à l'autre membre. Maniere de faire disparoître le diviseur qui affecte l'inconnue.

XVI.

Avec ces regles on est en état de résoudre toutes sortes d'Equations du premier dégré.

Pour exercer les Commençans : voici quelques exemples.

Exemples d'Equations du premier dégré résolues par les principes précédens.

$\frac{6}{5}x - 90 + \frac{2}{3}x = \frac{4}{3}x - 82$ se change par la transposition en $\frac{6}{5}x + \frac{2}{3}x - \frac{4}{3}x = 90 - 82$ ou en réduisaut $\frac{6x}{5} - \frac{2}{3}x = 8$ ou $\frac{18}{15}x - \frac{10}{15}x = 8$ ou $\frac{8}{15}x = 8$ ou $8x = 8 \times 15$ ou en dernier lieu $x = 15$.

De même $\frac{2}{7}x + 9 = \frac{1}{3}x - 10$ devient en transposant $\frac{1}{3}x - \frac{2}{7}x = 10 + 9$ ou $\frac{1}{3}x - \frac{2}{7}x = 19$ ou $\frac{1}{21}x = 19$ ou $x = 399$.

Enfin $\frac{2}{9}x - 40 - \frac{1}{4}x = 60 - \frac{7}{5}x$ donne en transposant $\frac{2}{9}x - \frac{1}{4}x + \frac{7}{5}x = 100$, qui en réduisant d'abord $\frac{2}{9}$ & $\frac{1}{4}$ au même Dénominateur devient $\frac{7}{5}x - \frac{1}{36}x = 100$, & qui en réduisant $\frac{7}{5}$ & $\frac{1}{36}$ au même Dénominateur devient ensuite $\frac{247}{180}x = 100$ ou $x = \frac{18000}{247}$

XVII.

Au lieu de réduire toutes les fractions au même Dénominateur, on peut faire disparoître l'un après l'autre tous les Diviseurs de l'Equation donnée par la méthode suivante qui a dû être bien-tôt imaginée par les premiers qui ont manié ces sortes d'Equations.

Maniere de faire évanouir les fractions d'une Equation.

Soit repris l'exemple précédent $\frac{2}{9}x - \frac{1}{4}x + \frac{7}{5}x = 100$, il est clair que si on multiplie les deux membres de cette Equation par 9, les deux produits seront les mêmes ; car des quantités égales multipliées par le même nombre doivent donner le même produit, on aura par cette multiplication $\frac{18}{9}x - \frac{9}{4}x + \frac{63}{5}x = 900$ qui, à cause que $\frac{18}{9}x = 2x$, se ré-

duit à $2x - \frac{9}{4}x + \frac{63}{5}x = 900$, dans laquelle le Diviſeur 9 a diſparu, & l'on voit bien que cela devoit arriver néceſſairement, car $\frac{2}{9}$ de quelque quantité que ce ſoit multipliés par 9 doivent donner 2 entiers de cette même quantité. Pour faire diſparoître de même 4, il faudra multiplier tous les termes de l'Equation par 4, en obſervant ſeulement pour le terme $\frac{9}{4}x$ que la multiplication par 4 ſe fera en ôtant le 4 de deſſous. Ainſi l'on aura $8x - 9x + \frac{252}{5}x = 3600$ ou $\frac{252}{5}x - x = 3600$, qui, multipliant les deux membres par 5; deviendra $252x - 5x = 18000$ ou $247x = 18000$ ou $x = \frac{18000}{247}$

Le principe géneral qu'on tire de-là, c'eſt que pour faire diſparoître un Diviſeur d'un terme, il faut multiplier tous les autres termes par le Diviſeur, & l'ôter du terme où il eſt.

XVIII.

Autre méthode par laquelle on les fait tous évanouir à la fois.

On peut trouver une maniere de faire diſparoître tous les Diviſeurs à la fois, en remarquant que ſi on multiplie tous les termes par un même nombre qui puiſſe ſe diviſer par chacun de ces Diviſeurs, chaque terme ſe réduira. Multiplions par exemple l'Equation $\frac{2}{9}x - \frac{1}{4}x + \frac{7}{5}x = 100$ par 180 qui peut ſe diviſer par 9, par 4 & par 5; on aura $\frac{360}{9}x - \frac{180}{4}x + \frac{1260}{5}x = 18000$ ou $40x - 45x + 252x = 18000$ ou $247x = 18000$.

Or pour trouver ce nombre qui puiſſe ſe diviſer par tous les Diviſeurs, il ne faut que multiplier ſucceſſivement ces Diviſeurs les uns par les autres. Qu'on ait, par exemple,

$\frac{7}{3}x + \frac{1}{5}x = 160 - \frac{2}{7}x$ dont on veuille faire évanouir les Diviſeurs, je multiplie d'abord 3 par 5, & je multiplie enſuite leur produit 15 par 7, ce qui me donne 105 pour le nombre qui eſt diviſible par 3, 5, 7: ce nombre trouvé, je m'en ſers pour multiplier toute l'Equation, ce qui me donne $\frac{735}{3}x + \frac{105}{5}x = 16800 - \frac{210}{7}x$ ou $245x + 21x = 16800 - 30x$

Pour abreger encore cette operation, au lieu de former le produit 105 des trois Diviſeurs, on peut ſe contenter d'écrire ainſi ce produit $3 \times 5 \times 7$ la multiplication donne alors $\frac{7 \times 3 \times 5 \times 7}{3}x + \frac{7 \times 3 \times 5}{5}x = 160 \times 3 \times 5 \times 7 - \frac{7 \times 5 \times 3 \times 2}{7}x$ dans laquelle on voit tout de ſuite que le nombre 3 doit s'en aller du numerateur de la premiere fraction, puiſque la diviſion par 3 doit être détruite en faiſant la multiplication par 3, & de même du 5 & du 7, qui ſont à la fois aux numerateurs & aux diviſeurs des autres fractions.

Par ce moyen on arrive à l'Equation $7 \times 5 \times 7x + 7 \times 3x = 160 \times 3 \times 5 \times 7 - 2 \times 3 \times 5x$ qui en faiſant les multiplications indiquées par les ſignes $\times$ donne $245x + 21x = 16800 - 30x$ délivrée de fractions.

XIX.

Pour ſuivre le plus vraiſemblablement qu'il eſt poſſible l'ordre des inventeurs, nous ne nous arrêterons pas maintenant à approfondir davantage la méthode de dégager l'inconnue, mais nous reviendrons à la maniere de mettre les Problêmes en équations; la réſolution des équations a pû, indépendamment des Problêmes auſquelles elles ont rapport, occuper les

Algebriſtes

Algebriſtes lorſque cette Science a été avancée à un certain point, mais il eſt à préſumer que ceux qui en ont jetté les fondemens, n'ont examiné les Equations qu'à l'occaſion des Problêmes dont elles étoient, pour ainſi dire, le dénouement. D'ailleurs il ſe trouve quelquefois dans les Equations des complications dont on ne ſe ſeroit pas douté, ſi la nature des Problêmes qu'on cherchoit ne les avoit pas amenées.

Nous ne pouvons rien dire ici de plus net, ſur la maniere génerale de mettre les Problêmes en équations, que ce que nous avons dit art. VIII. mais nous allons donner pluſieurs exemples qui accoutumeront les Commençans à cette recherche.

Troiſiéme Problême.

Pour payer un certain nombre d'Ouvriers ſur le pied de 3 ℔ chacun, il manque 8 ℔ à un homme qui les fait travailler, mais en ne leur donnant chacun que 2 ℔ il lui reſte 3 ℔, on demande combien cet homme a d'argent.

On employe une barre en algebre comme en arithmetique pour indiquer la Diviſion.

Soit x le nombre de livres que poſſede cet homme, donc $x + 8$ eſt la ſomme qui peut ſatisfaire tous les Ouvriers ſur le pied de 3 ℔ & comme le nombre des Ouvriers doit être trois fois plus petit que celui qui exprime cette ſomme, il ſera exprimé par le tiers de $x + 8$, ce qu'on écrira ainſi, $\frac{x+8}{3}$; car en Algebre comme en arithmetique une barre horizontale indique toujours la diviſion de la quantité ſuperieure par l'inférieure.

De plus puiſqu'il reſte 3 ℔ quand on ne donne que 2 ℔ à chaque Ouvrier, $x - 3$ eſt donc la ſomme ſuiffiſante pour payer tous

ces Ouvriers à raiſon de 2 ℔ chacun. Donc $\frac{x-3}{2}$ peut exprimer le nombre d'Ouvriers, mais puiſque nous avons deux valeurs du même nombre, il faut qu'elles ſoient égales, le Problême eſt donc réduit à la réſolution de l'Equation $\frac{x-3}{2} = \frac{x+8}{3}$

Pour le réſoudre nous commencerons par faire diſparoître le diviſeur 2 du membre $\frac{x-3}{2}$ de cette Equation, en multipliant l'autre membre par ce même nombre 2, ce qui changera l'Equation en $x - 3 = \frac{2x+16}{3}$; car il eſt évident que le double de $\frac{x-3}{2}$ eſt $x - 3$ & que le double de $\frac{x+8}{3}$ ſera $\frac{2x+16}{3}$ par la même raiſon que $2x + 16$ eſt le double de $x + 8$. On fera enſuite évanouir le diviſeur 3 de l'Equation $\frac{2x+16}{3} = x - 3$, en multipliant le ſecond membre par 3 & en l'ôtant du premier, ce qui donnera $2x + 16 = 3x - 9$ ou $x = 25$.

Si on veut ſçavoir à préſent combien il y a d'Ouvriers, il faut prendre une des deux expreſſions $\frac{x-3}{2}$ ou $\frac{x+8}{3}$ qu'on a trouvées pour ce nombre, $\frac{x-3}{2}$ par exemple. Puiſqu'on ſçait maintenant que $x = 25$, $x - 3$ ſera donc 22, $\frac{x-3}{2}$ partant ſera $\frac{22}{2} = 11$ nombre d'Ouvriers demandé.

XX.

Il eſt bon de remarquer à propos de l'Equation $\frac{x-3}{2} = \frac{x+8}{3}$, qu'il ne ſeroit pas permis pour y appliquer la regle de l'art. XI. de changer de côté & de ſigne les quantités $- 3$ & $+ 8$, &

d'écrire ainsi l'Equation $\frac{x-8}{2} = \frac{x+3}{3}$, parce que nombre -3 n'est pas proprement un terme du premier membre, mais seulement un terme de son dividende $x-3$; la quantité de $\frac{x-3}{2}$ n'étant réellement qu'un seul terme de l'Equation, ainsi que $\frac{x+8}{3}$. Pour appliquer donc la regle de l'art. XI. il faudroit commencer par prendre, ainsi qu'il est indiqué par le nombre 2 qui est sous la premiere barre, la moitié de $x-3$ ce qui donneroit $\frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$; ensuite il faudroit prendre, à cause du 3 qui est sous l'autre barre, le tiers de $x-8$ qui seroit $\frac{1}{3}x - \frac{8}{3}$, égalant alors ces deux quantités on auroit l'Equation $\frac{1}{2}x - \frac{3}{2} = \frac{1}{3}x + \frac{8}{3}$ dans laquelle on pourroit faire les transpositions qu'on voudroit.

XXI.

Autre solution du même Problême.

Le Problême précédent pourroit encore être résolu de la maniere suivante.

Que y exprime le nombre d'Ouvriers, $3y$ sera l'argent qu'il faudroit leur donner sur le pied de 3 ₶ chacun. Mais il manque 8 ₶ pour les satisfaire à ce prix : donc $3y-8$ est l'argent que possede celui qui les doit payer.

D'un autre côté $2y$ seroit ce qu'il faudroit pour payer ces Ouvriers à raison de 2 ₶, & il resteroit en ce cas 3 ₶. Donc $2y+3$ est une autre expression de l'argent que possede celui qui les doit payer.

Il faut donc égaler les deux quantités $2y+3$ & $3y-8$, ou ce qui revient au même, il faut résoudre l'Equation $2y+3=3y-8$ pour

avoir la valeur de y. Cette Equation étant résolue par les principes précédens, ce qui eſt fort facile, on aura 11 pour y, c'eſt-à-dire pour le nombre d'Ouvriers demandé.

XXII.

Quatriéme Problême.

Un Courrier eſt parti d'un lieu, il y a 9 heures & fait 5 lieues en 2 heures, on envoye un autre Courrier après lui, dont la viteſſe eſt telle qu'il fait 11 lieues en 3 heures; Il s'agit de ſçavoir où ce ſecond Courrier attrapera le premier.

Soit x le chemin que le ſecond Courrier fera avant d'avoir attrapé le premier, il eſt évident que ce chemin doit être égal à celui que le premier Courrier avoit fait pendant ſes 9 heures d'avance, plus au chemin que le même premier Courrier fait pendant le temps que marche le ſecond Courrier. Pour trouver d'abord le chemin que le premier Courrier avoit fait pendant 9 heures, il faut faire cette proportion,* ou regle de trois.

Comme 2 heures ſont a 5 lieues ainſi 9 heures ſont à un quatriéme terme qui, ſuivant les regles connues en Arithmetique, ſe trouvera en multipliant le ſecond terme 5 de la proportion par le troiſiéme 9, & en diviſant leur produit par le premier 2; & qui ſera par conſequent $\frac{45}{2}$ nombre de lieues faites par le premier Courrier pendant les 9 heures.

* Je ſuppoſe ici, ou qu'on ait lû dans mes Elemens de Geometrie les Articles IX, X, &c. de la ſeconde Partie, dans leſquels on traite des proportions, ou qu'au moins on poſſede bien la regle de trois expliquée dans tous les livres d'Arithmetique.

Maniere dont on exprime les proportions en Algebre.

Mais comme en Algebre on veut écrire toujours le plus courtement qu'il est possible ses operations, voici comment on dénote cette proportion;

heures lieues heures lieues

$$2 : 5 = 9 : \frac{45}{2}$$

Les signes : servant, l'un à comparer 2 à 5, & l'autre 9 à $\frac{45}{2}$ & le signe = servant à marquer l'égalité, qui doit être entre le rapport de 2 à 5 & celui de 9 à $\frac{45}{2}$.

Pour trouver ensuite le chemin que le même Courrier fera pendant le temps que le second Courrier fera le chemin x, on cherchera premierement le temps qu'il faut au second Courrier pour faire le chemin x, ce qui se trouvera par cette proportion;

lieues heures lieues heures

~~heures~~ ~~lieues~~ ~~heures~~ ~~lieues~~

$$11 : 3 = x : \frac{3x}{11}$$

par laquelle on apprend que sans s'embarrasser du nombre de lieues contenues dans x, il suffit de multiplier ce nombre par 3 & de le diviser par 11, pour avoir le nombre d'heures qu'il faut au second Courrier pour le parcourir.

Sans faire attention maintenant si le nombre d'heures exprimé par $\frac{3}{11}x$ est connû, ou s'il est inconnu, on fera cette proportion.

heures lieues heures lieues

$$2 : 5 = \frac{3}{11}x : \frac{15}{22}x$$

dont le quatriéme terme $\frac{15}{22}x$ exprime le chemin du premier Courrier, pendant le temps $\frac{3}{11}x$ c'est-à-dire avant d'être attrapé.

Par ce moyen on a la même quantité exprimée de deux façons differentes, car le chemin

du ſecond Courrier a premierement pour expreſſion x, en ſecond lieu il eſt la ſomme des $\frac{45}{2}$ lieues d'avance qu'avoit le premier Courrier ſur lui, & des $\frac{15}{22}x$ que ce même premier Courrier devoit avoir fait, juſqu'à ce qu'il fut attrapé. Egalant donc ces deux expreſſions, on aura l'Equation $x = \frac{45}{2} + \frac{15}{22}x$ qui donne par les regles précédentes $x = 70 + \frac{5}{7}$.

XXIII.

Si le premier Courrier, outre l'avantage qu'il a d'être parti plûtôt, avoit encore celui d'être parti d'un lieu plus avancé, la queſtion, quoique plus compliquée, ſeroit aiſément réduite aux mêmes principes.

Que le premier Courrier par exemple allant en Eſpagne, ſoit parti d'Orleans le lundi à 8 heures du ſoir en faiſant 7 lieues en 3 heures; & que le ſecond Courrier allant après le premier ſoit parti le mardi matin à 10 heures de Paris, ſuppoſé à 34 lieues d'Orleans, en faiſant 13 lieues en 4 heures, on demande le lieu de leur rencontre.

Pour réſoudre cette queſtion il faut prendre la différence de 8 heures du ſoir, à 10 heures du matin, ce qui donne 14 heures; & comme le premier fait 7 lieues en 3 heures, on aura par cette proportion

$$\overset{\text{heures}}{3} : \overset{\text{lieues}}{7} = \overset{\text{heures}}{14} : \overset{\text{lieues}}{\tfrac{98}{3}}$$

leſquelles étant ajoutées avec les 34 lieues d'avance donneront $34 + \frac{98}{3}$ ou $\frac{200}{3}$ lieues pour la diſtance de Paris où étoit le premier Courrier, lorſque le ſecond eſt parti. Enſuite on fera comme ci-deſſus cette proportion.

$\overset{\text{lieues}}{13} : \overset{\text{heures}}{4} = \overset{\text{lieues}}{x} : \overset{\text{heures}}{\frac{4}{13}x}$ nombre d'heures néceſſaires au ſecond Courrier pour faire le chemin x.

Mais pendant ce même nombre d'heures, le premier Courrier aura fait un chemin qu'on trouvera ainſi $\overset{\text{heures}}{3} : \overset{\text{lieues}}{7} = \overset{\text{heures}}{\frac{4}{13}x} : \overset{\text{lieues}}{\frac{28}{39}x}$

L'on aura donc l'Equation $x = \frac{28}{39}x + \frac{200}{3}$ d'où l'on tire par les regles expliquées ci-deſſus $x = 236 + \frac{4}{11}$, chemin du ſecond Courrier, lorſqu'il aura attrapé le premier.

XXIV.

Lorſque les premiers Algebriſtes ont eu trouvé la ſolution de quelque queſtion qui les intéreſſoit, ils n'ont gueres manqué d'en faire différentes applications en variant les nombres donnés dans ces queſtions. Par exemple ils auront repeté pluſieurs fois la queſtion précédente, en changeant les rapports des viteſſes des Courriers, & la diſtance entre leurs départs. Dans ces différentes applications ils ont ſenti qu'il y avoit une partie de l'operation qu'on repetoit à chaque exemple particulier du même Problême, & qui pouvoit ſe faire une fois pour toutes en cherchant quelque ſolution où l'on ne ſe reſtraignit point à tel ou tel nombre particulier, mais qui fut générale pour tout nombre donné. Pour faire voir ce qu'ils ont imaginé à ce ſujet, nous allons reprendre le Problême précédent, & le traiter le plus généralement qu'il nous ſera poſſible.

Solution du Problême précédent pris généralement.

Soit exprimée la diſtance qui eſt entre les deux Courriers par la lettre . . . . *a* on fera de cet *a* le nombre de lieues qu'on voudra, lorſque la queſtion ſera pouſſée juſqu'à la fin.

Soit exprimée enſuite le nombre d'heures dont le départ du premier Courrier a précedé celui du ſecond par la lettre . . . . *b*

Que la viteſſe du premier Courrier ſoit telle qu'il faſſe le nombre de lieues . . . . *c* pendant le nombre d'heures . . . . *d*

Que la viteſſe du ſecond Courrier ſoit telle qu'il faſſe le nombre de lieues . . . . *e* dans le nombre d'heures . . . . *f*

Soit enfin comme dans la ſolution particuliere le chemin que le ſecond Courrier doit faire pour joindre le premier . . . . *x*

On employe les premieres lettres de l'Alphabet, pour exprimer ce que l'on connoît, & les dernieres pour ce qu'on ne connoît pas.

C'eſt une attention qu'on a communément dans l'Algebre, de prendre les premieres lettres *a*, *b*, *c*, &c. de l'Alphabet, pour exprimer les quantités connues & les dernieres *s*, *t*, *u*, *x*, &c. pour celles qu'on cherche.

Pour trouver préſentement à l'exemple de la méthode qu'on a ſuivie dans l'exemple précédent, le chemin que fait le premier Courrier pendant le nombre d'heures *b*, il faudra chercher le quatriéme terme d'une proportion, dont le premier terme ſoit le nombre d'heures *d*, le ſecond le nombre de lieues *c*, le troiſiéme le nombre d'heures *b*, & il eſt clair que cette operation ſe fera, comme dans toutes les autres regles de trois, en multipliant le ſecond & le troiſiéme terme, l'un par l'autre, & en diviſant

leur produit par le premiere terme.

Quant à la maniere d'exprimer le produit de ces termes qui ne ſont plus comme ci-deſſus des chiffres, mais des lettres propres à exprimer des nombres quelconques, ce qu'on a trouvé de plus ſimple c'eſt de placer à côté l'une de l'autre, les lettres qu'on veut multiplier, à l'égard de la diviſion, nous avons dejà vû qu'en Algebre comme en Arithmetique, on mettoit une barre horizontale entre les quantités qu'on veut diviſer.

Les lettres qui ſe ſuivent ſans aucun ſigne entr'elles ſont cenſées ſe multiplier.

Par ce moyen la proportion précédente s'écrit ainſi $d : c = b : \frac{bc}{d}$

Ayant donc $\frac{bc}{d}$ pour exprimer le chemin que le premier Courrier a fait avant que le ſecond ſoit parti, ſi on ajoute à ce chemin la diſtance a qui étoit entr'eux, on aura pour le chemin d'avance du premier au moment du départ du ſecond . . . . $a + \frac{bc}{d}$

Pour trouver enſuite le chemin que le premier Courrier fait pendant que l'autre court après lui & qu'il parcourt x; commençons ainſi que ci-deſſus par trouver le temps que le ſecond Courrier met à parcourir l'eſpace x, ce qui ſe fera par le moyen d'une proportion . . . $e : f = x : \frac{fx}{e}$ dont le premier terme ſera le nombre de lieues e, le ſecond le nombre d'heures f, le troiſiéme le nombre de lieues x & le quatriéme $\frac{fx}{e}$ le tems cherché.

Or quel que ſoit le nombre d'heures $\frac{fx}{e}$ qu'ait couru le ſecond Courrier pour attrapper le pre-

mier, on ſçait que ſi on fait une proportion dont les trois premiers termes ſoient 1°. le nombre d'heures d, 2°. le nombre de lieues c; 3°. le nombre précédent $\frac{fx}{e}$, le quatriéme terme ſera le chemin que le ſecond a fait dans le même temps que le premier Courrier a fait x.

Cette proportion s'écrira ainſi $d : c = \frac{fx}{e} : \frac{c \times \frac{fx}{e}}{d}$ nombre de lieues faites par le premier Courrier pendant que le ſecond parcourt x.

Mais le chemin du premier Courrier ajouté avec le chemin $a + \frac{bc}{d}$ qu'il avoit d'avance, doit égaler le chemin du ſecond.

On a donc l'Equation $x = a + \frac{bc}{d} + \frac{c \times \frac{fx}{e}}{d}$

Si on ſe reſſouvient des operations des fractions, on doit ſçavoir que pour multiplier une fraction comme $\frac{6}{3}$ par 4 il faut multiplier le numerateur * & écrire $\frac{6 \times 4}{3}$ ou $\frac{24}{3}$. De même pour multiplier $\frac{fx}{e}$ par c il faut multiplier c par fx & laiſſer le diviſeur e, ce qui donne $\frac{cfx}{e}$ pour

* On doit avoir vû dans l'Arithmetique, que le numerateur d'une fraction eſt le nombre placé au deſſus de la barre, & qui ſert de Dividende; de même qu'on appelle denominateur, le nombre qui eſt au deſſous de la barre & qui ſert de diviſeur. Les operations d'Arithmetique que je ſuppoſe ici, & dans beaucoup d'autres endroits de cet ouvrage, ſont expliqueés aſſez clairement dans pluſieurs livres. Pour éviter cependant aux Lecteurs la peine d'y recourir. Je vais en peu de mots rappeller ces operations & les raiſons ſur leſquelles elles ſont fondées.

$c \times \frac{fx}{e}$. On sçait de plus que quand on divise une fraction comme $\frac{5}{3}$ par un nombre quelconque comme 6, il faut multiplier le dénominateur 3 par ce nombre 6, ce qui donne $\frac{5}{3 \times 6}$ ou $\frac{5}{18}$. De même pour diviser la fraction $\frac{cfx}{e}$ par d il faut écrire $\frac{cfx}{de}$.

Pour multiplier une fraction telle que $\frac{5}{7}$ par 8 on multiplie le numerateur 5 par 8, & l'on écrit le même diviseur 7 sous leur produit 40, ce qui donne $\frac{40}{7}$ la raison en est claire, car 8 fois 5 septiémes doivent faire 40 septiémes, comme 8 fois 5 grandeurs quelconques font 40 de ces mêmes grandeurs.

Pour diviser $\frac{3}{5}$ par 4, il faut écrire sous le numerateur 3 le produit 20 de 4 par le denominateur 5, ce qui donne $\frac{3}{20}$. La raison en est que 1 cinquiéme devenant 1 vingtiéme, lorsqu'on le divise par 4, 3 cinquiémes doivent devenir 3 vingtiémes par la même division.

Pour multiplier $\frac{5}{7}$ par $\frac{8}{3}$ on multiplie les numerateurs 5 & 8, & on divise leur produit 40 par le produit 21 des denominateurs 3 & 7 ce qui donne $\frac{40}{21}$. Cette operation est fondée sur ce que le produit de $\frac{8}{3}$ par $\frac{5}{7}$ doit être 3 fois plus petit que celui de 8 par $\frac{5}{7}$, mais 8 par $\frac{5}{7}$ a donné $\frac{40}{7}$ donc $\frac{8}{3}$ par $\frac{5}{7}$ doit donner le tiers de $\frac{40}{7}$ c'est-à-dire $\frac{40}{21}$.

Enfin pour diviser $\frac{3}{5}$ par $\frac{4}{11}$ il faut multiplier le numerateur 3 de la premiere fraction par le dénominateur 11 de la seconde, & diviser leur produit 33 par le produit 20 du dénominateur 5 de la premiere fraction & du numerateur 4 de la seconde, ce qui donne $\frac{33}{20}$. Operation dont on voit la raison en remarquant que $\frac{3}{5}$ divisés par 4 donneroient $\frac{3}{20}$ & que $\frac{3}{5}$ divisés par $\frac{4}{11}$ qui sont 11 fois plus petits que 4 doivent donner un quotient 11 fois plus grand, c'est-à-dire $\frac{33}{20}$.

Ayant ainſi changé l'Expreſſion précédente $\frac{c \times \frac{fx}{e}}{d}$ en $\frac{cfx}{de}$ l'Equation qu'on doit réſoudre eſt $x = a + \frac{bc}{d} + \frac{cfx}{de}$. Operation qui demande qu'on commence, ainſi qu'on l'a enſeigné Art. XVIII. par multiplier tous les termes, excepté le dernier par le diviſeur de afin de l'ôter de ce terme.

Nous aurons par cette operation $dex = ade + \frac{bcde}{d} + cfx$ on $dex = ade + bce + cfx$ à cauſe que $\frac{bcde}{d}$ eſt la même choſe que bce puiſque la quantité bce reſte la même lorſqu'on la multiplie & qu'on la diviſe par d.

Paſſant le terme cfx dans le premier membre on aura $dex - cfx = ade + bce$.

Afin de trouver x dans cette Equation, nous remarquerons que ſi nous connoiſſions les nombres de, & cf qui expriment ce que contiennent d'x les termes dex, & cfx, nous retrancherions le ſecond du premier, & que le reſte qui exprimeroit la quantité d'x contenues dans le premier membre de l'Equation, ſerviroit de diviſeur au ſecond membre pour avoir la valeur de x. Or ſans connoître les nombres de, & cf, il eſt clair que $de - cf$ exprime leur différence, & par conſéquent la quantité d'x que contient le premier membre de l'Equation $dex - cfx = ade + bce$. Donc x a pour valeur ce qui vient en diviſant le ſecond membre par ce nombre $de - cf$. Donc $x = \frac{ade + bce}{de - cf}$ & c'eſt là la ſolution générale du Problême pré-

cédent, car qu'on ſçache à préſent ce que c'eſt que a, b, c, d, e, f, on n'aura plus qu'à en faire l'uſage indiqué par cette valeur générale de x, c'eſt-à-dire, multiplier ſucceſſivement a, d, e, l'un par l'autre : ajouter à ce produit celui que l'on a en multipliant ſucceſſivement b, c, e, & diviſer la ſomme de ces deux produits, par le nombre qui eſt la différence du produit de c par f au produit de d par e, & l'on aura par cette operation telle ſolution particuliere qu'on voudra.

XXV.

Application de la ſolution précédente à des nombres.

Suppoſons, par exemple, comme dans l'Art. XXIII. que la diſtance entre les deux Courriers ſoit de 34 lieues, que le premier Courrier ſoit parti 14 heures plutôt que le ſecond, qu'il faſſe 7 lieues en 3 heures, & que le ſecond faſſe 13 lieues en 4 heures, on aura

$$a = 34,\ b = 14,\ c = 7$$
$$d = 3,\ e = 13, f = 4$$

qui donneront $ade = 34 \times 3 \times 13$, c'eſt-à-dire

$$= 102 \times 13 = 1326,$$
$$bce = 14 \times 7 \times 13 = 1274$$

& par conſequent $ade + bce = 2600$

$$de = 39, cf = 28 \text{ \& partant } de - cf = 11$$

D'où l'on tirera $x = \frac{ade + bce}{de - cf} = \frac{2600}{11} = 236 + \frac{4}{11}$ ainſi qu'on l'a trouvé dans l'Art. XXIII.

Autre application.

Si on veut enſuite tirer de la ſolution générale le premier cas calculé dans l'art. XXII où les deux Courriers étoient ſuppoſés partir du même lieu, le premier ayant 9 heures d'avance, & une vîteſſe capable de lui faire faire 5 lieues en 2 heures, tandis que le ſecond en fait

11 en 3. On aura dans ce cas..............

$$a=0, b=9, c=5,$$
$$d=2, e=11, f=3,$$

& ſubſtituant ces valeurs dans la formule générale ou valeur de x on aura $x = \frac{9\times5\times11}{2\times1-5\times3} = \frac{495}{7} = 70 + \frac{5}{7}$ ainſi qu'on l'a trouvé dans l'art. XXII. On fera de même tant d'autres applications qu'on voudra.

XXVI.

On n'a pas eu plûtôt trouvé la maniére de généraliſer un Problême en ſe ſervant de lettres au lieu de nombres, qu'on a preſque toujours pris les Problêmes dans leur plus grande généralité, il faut donc accoutumer les Commençans à les traiter ainſi. Dans cette vue nous allons réſoudre le Problême ſuivant.

Cinquiéme Problême.

Un Ouvrier peut faire un certain ouvrage exprimé par a *dans un tems exprimé par* b; *un ſecond fait l'ouvrage* c *dans le tems* d, *un troiſiéme l'ouvrage* e *dans le tems* f, *on demande quel tems il faudra à ces trois Ouvriers travaillant enſemble pour faire l'ouvrage* g

Soit x le tems cherché on aura l'ouvrage fait par le premier dans ce tems, en faiſant la proportion ſuivante :

$$b : a = x : \frac{ax}{b}$$

On aura l'ouvrage fait dans le même tems par le ſecond Ouvrier en faiſant la proportion

$$d : c = x : \frac{cx}{d}$$

Enfin on aura l'ouvrage fait dans le même tems

par le troisiéme Ouvrier par le moyen de cette proportion $f : e = x : \frac{ex}{f}$.

Donc $\frac{ex}{f} + \frac{cx}{d} + \frac{ax}{b}$ est l'ouvrage des trois Ouvriers travaillant ensemble pendant le tems cherché, mais cet ouvrage doit égaler g, on a donc l'Equation $\frac{ex}{f} + \frac{cx}{d} + \frac{ax}{b} = g$.

Pour la résoudre on multipliera suivant les principes de l'article XVIII. toute l'Equation par le produit fdb des diviseurs, & l'on aura $\frac{edfbx}{f} + \frac{cdbfx}{d} + \frac{axfdb}{b} = bdfg$ qui se réduit à $edbx + fcbx + adfx = fbdg$, dans laquelle remarquant que $edb + fcb + adf$ doit exprimer le nombre d'x contenus dans le second membre, on aura $x = \frac{bdfg}{bde + bcf + adf}$.

XXVII.

Pour faire quelqu'application de ce Problême, supposons qu'un Masson ait pû faire 7 pieds courans d'une muraille en 5 jours, qu'un second Masson en ait pû faire 10 pieds en 3 jours, & un troisiéme 11 en 4 jours, on demande le tems dans lequel ces trois Massons travaillant ensemble feront 150 pieds courans de la même muraille. Exemple en nombres.

On aura par ces suppositions

$a = 7$; $b = 5$; $c = 10$; $d = 3$; $e = 11$, $f = 4$, $g = 150$,

& partant $bdfg = 5 \times 3 \times 4 \times 150 = 9000$

$bde = 5 \times 3 \times 11 = 165$; $bcf = 5 \times 10 \times 4 = 200$

$adf = 7 \times 3 \times 4 = 84$, ce qui donnera pour la

valeur de x, $\frac{9000}{449}$ ou $20 + \frac{20}{449}$ nombre de jours dans lequel l'ouvrage proposé sera fait.

XXVIII.

Autre exemple.

Supposons maintenant qu'on demande en quel tems un reservoir de 200 pieds cubes sera rempli par trois tuyaux dont le premier pourroit remplir 9 pieds cubes en $2\frac{1}{2}$ jours, le second 15 pieds cubes en $3\frac{1}{3}$ jours, & le troisiéme 19 pieds cubes en $5\frac{1}{4}$ jours; . . . . $a = 9$; $b = 2\frac{1}{2}$ ou $\frac{5}{2}$; $c = 15$; $d = 3\frac{1}{3}$ ou $\frac{10}{3}$. $e = 19$; $f = 5\frac{1}{4}$ ou $\frac{21}{4}$; $g = 200$.

Par les substitutions on aura . . . .

$$x = \frac{\frac{5}{2} \times \frac{10}{3} \times \frac{21}{4} \times 200}{\frac{5}{2} \times \frac{20}{3} \times 19 + \frac{5}{2} \times 15 \times \frac{21}{4} + 9 \times \frac{10}{3} \times \frac{21}{4}}$$

qui devient $$\frac{\frac{210000}{2\times3\times4}}{\frac{950}{2\times3} + \frac{1575}{2\times4} + \frac{1890}{3\times4}}$$

Pour réduire cette quantité je multiplie le numerateur & le dénominateur de la premiere fraction du diviseur par 4; le numerateur & le dénominateur de la seconde par 3; & le numerateur de la troisiéme par 2, ce qui change la quantité en $$\frac{\frac{210000}{2\times3\times4}}{\frac{3800}{2\times3\times4} + \frac{4725}{2\times3\times4} + \frac{3780}{2\times3\times4}}$$

ou $\frac{\frac{210000}{2\times3\times4}}{\frac{12305}{2\times3\times4}}$ ou $\frac{210000}{12305}$ ou $17 + \frac{163}{2461}$

nombre cherché des jours qu'il faudroit pour remplir le reservoir donné en laissant couler les trois tuyaux à la fois.

XXIX.

XXIX.

On voit par les deux Problêmes précédens que les regles qu'on a données (art. x & suiv.) pour résoudre les Equations numériques du premier dégré peuvent également s'appliquer aux Equations litterales, mais on voit en même-tems que ces regles sont trop succintes pour que les Commençans n'ayent pas besoin qu'on les conduise encore dans la maniere de les employer, nous nous croyons d'autant plus obligés à les aider par un grand nombre de ces applications, que c'est probablement à un pareil travail qu'on doit plusieurs opérations d'Algebre très-utiles, que nous allons pour ainsi dire découvrir chemin faisant.

Les regles des art. x & suiv. suffisent pour les Equations litterales.

L'application de ces regles a donné naissance à plusieurs operations de l'Algebre.

Soit proposé de résoudre l'Equation $2ac + ab - ax = 3ac + 2ax - 5ab - dx$

Premier exemple de résolution d'Equations litterales.

Je commence par passer les termes $3ac$ & $-5ab$ dans l'autre membre de l'Equation en les changeant de signe ce qui me donne $2ac + ab - ax - 3ac + 5ab = 2ax - dx$. Je passe de même le terme $-ax$ de l'autre côté en observant aussi de changer son signe, ce qui me donne $2ac + ab - 3ac + 5ab = 2ax - dx + ax$. Je réduis ensuite cette Equation, 1° En ajoutant ab avec $5ab$ ce qui me donne $6ab$, 2° En mettant $-ac$ au lieu des termes $2ac$ & $-3ac$; 3° en mettant $3ax$ au lieu de $2ax + ax$; ainsi l'Equation proposée devient $6ab - ac = 3ax - dx$ qui donne $x = \frac{6ab - ac}{3a - d}$

XXX.

Deuxiéme exemple de résolution d'Equations litterales.

Soit $5ab + 2ax - 3bd = 2ab - 5ax + 7bd - ac - dx$; les termes $5ab - 3bd$ deviendront $-5ab + 3bd$ en passant dans le second membre & les termes $-5ax - dx$ deviendront $+5ax + dx$ en passant dans le premier ; on aura donc $2ax + 5ax + dx = 2ab + 7bd - ac - 5ab + 3bd$ qui se réduit à $7ax + dx = 10bd - 3ab - ac$ en mettant $7ax$ à la place de $2ax + 5ax$, $10bd$ à la place de $7bd + 3bd$, & $-3ab$ à la place de $2ab - 5ab$.

Dégageant présentement x de cette Equation on aura $x = \frac{10bd - ac - 3ab}{7a + d}$

XXXI.

Réduction des quantités à leur plus simple expression.

Dans la résolution des deux Equations précédentes on a eu besoin de réduire à une plus simple expression différens termes de même espece tels que $2ac$ & $-3ac$; $5ab$ & ab &c. comme cette opération est presque toujours nécessaire dans les Equations à résoudre & dans les autres parties de l'Algebre, les Commençans doivent chercher à la pratiquer facilement. Pour leur en donner le moyen, voici quelques exemples.

Soit $15abc - 13bcd - 7abc + 29bcd - 5abf + 9abc + 6chi$ à réduire.

On prendra dabord les termes $15abc$, $-7abc$ & $9abc$ qui sont de même espece, & on ajoutera les deux termes $15abc$ & $9abc$ qui sont l'un & l'autre positifs, c'est-à-

dire, affectés du signe $+$; on retranchera ensuite de leur somme laquelle est $24abc$, le terme $7abc$ à cause qu'il est négatif ou précédé du signe $-$, moyennant quoi $17abc$ sera ce que deviennent les trois termes $15abc - 7abc + 9abc$. De la même maniere au lieu de $29bcd - 13bcd$ on mettra $16bcd$. Quant aux termes $-5abf$ & $6chi$ qui sont seuls de leurs especes, on les écrira tels qu'ils sont, ainsi la quantité réduite sera $17abc + 16bcd - 5abf + 6chi$.

On appelle termes positifs ceux qui sont précédés de $+$ négatifs ceux qui sont précédés de $-$

Soit $\frac{5}{3}ab - \frac{4}{5}ac + \frac{3}{4}ax - ad + 7ab + \frac{5}{7}ax$, on aura en réduisant $\frac{26}{3}ab + \frac{41}{28}ax - \frac{4}{5}ac - ad$.

La quantité $2acd - 5ach - 3acd + 3ach - 6bfi$ deviendra en réduisant $-acd - 2ach - 6bfi$ qui étant entierement négative, montre que la quantité qu'on vouloit réduire renfermoit plus de négatif que de positif.

XXXII.

Il est à propos d'avertir ici que la réduction qu'on vient d'apprendre dans les exemples précédens, est absolument la même regle que celle qu'on appelle l'Addition, car lorsqu'on se propose d'ajouter deux quantités quelconques, il suffit de les écrire de suite & de les réduire après à leur plus simple expression: qu'on ait besoin, par exemple, d'ajouter la quantité $6ab - 2ac - 3ad$ avec $3ab + ac - 2ad + bf$, il n'y a autre chose à faire que de réduire la quantité $6ab - 2ac - 3ad + 3ab + ac - 2ad + bf$, ce qui donnera donc $9ab -$

L'Addition algebrique est la même operation que la précédente.

$ac - 5ad + bf$ pour la ſomme des deux propoſées.

Si on veut ajouter les deux quantités $2ac - 3ad + af$ & $ad - 5ac - 2af$, il ne s'agira que de réduire la quantité $2ac - 3ad + af + ad - 5ac - 2af$. La réduction faite il viendra $- 3ac - 2ad - af$. On s'étonnera peut-être d'abord qu'une Addition puiſſe mener à une quantité négative, mais l'on trouvera bien-tôt le dénouement de cette difficulté en remarquant qu'il faut néceſſairement, ou que les deux quantités $2ac - 3ad + af$ & $ad - 5ac - 2af$ ſoient toutes deux négatives, ou qu'au moins l'une des deux ſoit négative & plus grande que l'autre.

C'eſt ce qu'on reconnoîtra plus facilement en faiſant quelques exemples en nombres. Supposons d'abord que $a = 2$, $c = 3$, $d = 4$; $f = 5$, dans ce cas au lieu de $2ac - 3ad + af$ nous aurons $12 - 24 + 10$ ou ſimplement $- 2$, & au lieu de $ad - 5ac - 2af$ il viendra $8 - 30 - 20 = - 42$. Ainſi leur ſomme ſera -44, & on ne ſera pas étonné que la ſomme de deux quantités négatives ſoit négative.

Suppoſons enſuite que $a = 6$; $c = 5$; $d = 3$; $f = 2$ on aura $2ac - 3ad + af = 18$ & $ad - 5ac - 2af = - 156$. Or comme la ſeconde quantité eſt négative, & plus grande que la premiere la ſomme doit être négative.

XXXIII.

On demandera peut-être ſi on peut ajouter du négatif avec du poſitif, ou plûtôt ſi on peut dire qu'on ajoute du négatif. A quoi je réponds que cette expreſſion eſt exacte quand on ne confond point ajouter avec augmenter. Que deux perſonnes, par exemple, joignent leurs fortunes, quelles qu'elles ſoient, je dirai que c'eſt là ajouter leurs biens, que l'un ait des dettes & des effets réels, ſi ſes dettes ſurpaſſent ſes effets, il ne poſſedera que du négatif, & la jonction de ſa fortune à celle du premier diminuera le bien de celui-ci, enſorte que la ſomme ſe trouvera, ou moindre que ce que poſſedoit le premier, ou même entierement négative.

Comment on peut dire que l'on ajoute une quantité négative.

XXXIV.

La réduction enſeignée dans les Articles précédens donne encore naiſſance à une autre regle d'Algebre, la Souſtraction; car, par exemple, lorſque dans l'Equation $2ac + ab - ax = 3ac + 2ax - 5ab - dx$ (art. XXIX.) on a paſſé les termes $3ac - 5ab$ de l'autre côté en les changeant de ſigne, & qu'on eſt arrivé à l'Equation $2ac + ab - ax - 3ac + 5ab = 2ax - dx$ ou $-ac + 6ab - ax = 2ax - dx$, je dis qu'on a retranché la quantité $3ac - 5ab$ de la quantité $2ac + ab - ax$ & que le reſte eſt $-ac + 6ab - ax$. Car en faiſant diſparoître $3ac - 5ab$ du ſecond membre de l'Equation, c'eſt une Souſtraction qu'on a faite de cette quantité, or pour que l'égalité ſoit conſervée, il faut qu'on ait fait

On tire encore de l'opération précédente la Souſtraction algebrique.

une pareille Souſtraction de l'autre côté, donc $2ac + ab - ax - 3ac + 5ab$ ou $- ac + 6ab - ax$ eſt ce qui reſte de la quantité $2ac + ab - ax$ lorſqu'on en a ôté $3ac - 5ab$.

Procédé de la Souſtraction.

Ainſi lorſqu'on a deux quantités dont l'une doit être ſouſtraite, il faut changer les ſignes de celle qu'on veut ſouſtraire, l'écrire à la ſuite de l'autre, puis faire la réduction des quantités de même eſpece, ce qui, indépendamment de ce qu'on vient de dire, pourroit ſe démontrer de la maniere ſuivante.

Soit la quantité $2ac + ab - ax$ dont on ſe propoſe de retrancher la quantité $3ac - 5ab$. Il eſt évident que ſi on vouloit retrancher de la premiere quantité ſimplement $3ac$ il faudroit écrire $2ac + ab - ax - 3ac$, mais en retranchant la quantité $3ac$ au lieu de $3ac - 5ab$ on retranche une quantité trop grande de $5ab$: Donc il faut ajouter les $5ab$ qu'on a ôté de trop en ôtant $3ac$. Donc il faut écrire $2ac + ab - ax - 3ac + 5ab$ pour le reſte de $2ac + ab - ax$ lorſqu'on en a ôté $3ac - 5ab$.

Afin de s'exercer dans cette regle qu'on ſent bien devoir être employée ſouvent j'ajouterai les exemples ſuivans.

De $5ab + 10fg - 3ac + 2de$ ſi on retranche $2ab - 5fg + 6ac + de$, il reſtera $5ab + 10fg - 3ac + 2de - 2ab + 5fg - 6ac - de$ ou $3ab + 15fg - 9ac + de$.

De la quantité $6aeb + 3agh - 10bcd$ ſi on retranche $abc - 10aeb - 8agh$ on aura $16aeb - abc - 10bcd + 11agh$

De la quantité $3ac + ab + be$ si on retranche la quantité $- ac - 3ab$ il viendra $4ac + 4ab + be$.

XXXV.

Si on s'étonne que dans cette Soustraction le reste $4ac + 4ab + be$ soit plus grand que la quantité $3ac + ba + be$ dont on se proposoit de soustraire $- ac - 3ab$, ce ne pourra être qu'en confondant soustraire & diminuer ; car si on reconnoît au contraire que soustraire une quantité quelconque, a par exemple, d'une autre b, c'est sçavoir de combien b surpasse a, on trouvera très-possible qu'une quantité augmente par une soustraction. Qu'on demande, par exemple, de combien un homme est plus riche qu'un autre, si ce dernier n'a que des dettes, on verra bien-tôt que l'excès de richesse du premier sera ce qu'il possede plus une somme égale aux dettes de l'autre.

On augmente une quantité lorsqu'on en soustrait une quantité négative.

XXXVI.

Soit proposé de résoudre présentement l'Equation $\frac{cx}{2a} - \frac{ac}{2b} = x - \frac{4ad}{3c}$ pour faire disparoître d'abord le diviseur $2a$, on le fera servir suivant l'art. XV. de multiplicateur à tous les termes de l'Equation, & l'on aura $cx - \frac{ac \times 2a}{2b} = 2a \times x - \frac{4ad \times 2a}{3c}$, mais au lieu de $ac \times 2a$ il est clair qu'on peut mettre $2aac$, puisque le produit de $2a$ par ac doit être double de celui de a par ac & que le produit de a par ac doit être aac. De même $2a \times x$ sera

Troisiéme exemple de résolution d'Equations litterales.

$2ax$ & $4ad \times 2a$ ſera $8aad$, car le produit de ad par a eſt aad & celui de $4ad$ par $2a$ doit être octuple de celui de ad par a.

L'Equation eſt donc changée en $cx - \frac{2aac}{2b} = 2ax - \frac{8aad}{3c}$ ou $cx - \frac{aac}{b} = 2ax - \frac{8aad}{3c}$ à cauſe que $\frac{2aac}{2b}$ ou $\frac{aac}{b}$ ſont la même choſe; multipliant alors tous les termes de cette Equation par b elle deviendra $b \times cx - aac = 2ax \times b - \frac{8aad}{3c} \times b$ ou $bcx - aac = 2abx - \frac{8aabd}{3c}$ qui ſe changera encore en $cbx \times 3c - aac \times 3c = 2abx \times 3c - 8aabd$ ou $3bccx - 3aacc = 6abcx - 8aabd$, car les produits de c par cbx, aac & $2abx$, ſeroient $bccx$, $aacc$, $2abcx$, & par conſequent ceux de $3c$ par les mêmes quantités, doivent être triples, c'eſt-à-dire, $3bccx$, $3aacc$, $6abcx$, tranſpoſant préſentement on aura $3bccx - 6abcx = 3aacc - 8aabd$ qui donne enfin $x = \frac{3aacc - 8aabd}{3bcc - 6abc}$.

XXXVII.

Un chiffre placé au deſſus & à droite d'une lettre, déſigne ce qu'elle auroit été re-

Dans l'exemple précedent, la multiplication de quelques quantités qui contenoient les mêmes lettres a donné la répetition de ces lettres dans les produits : Or comme les Algebriſtes cherchent toujours à s'exprimer de la maniere la plus courte, ils ont imaginé au lieu de répeter une lettre pluſieurs fois de ſuite, de ne l'écrire qu'une ſeule fois, en plaçant au deſſus de cette lettre & à ſa droite un chiffre, qui déſigne le nombre de fois que cette lettre devroit être

répetée. Par-là au lieu de l'expreſſion précédente $x = \frac{3aacc - 8aabd}{3bcc - 6abc}$ on écrira $x = \frac{3a^2c^2 - 8a^2bd}{3bc^2 - 6abc}$.

pétée de fois par la multiplication.

Lorſque dans une opération on aura beſoin de *aaa*, c'eſt-à-dire du produit de *aa* par *a* ou de *a* multiplié par lui-même deux fois de ſuite, on mettra ſimplement a^3. De même au lieu de *cccc*, c^4. Lorſqu'une lettre eſt ainſi répetée ou plutôt cenſée répetée à l'aide d'un chiffre, on dit qu'elle eſt élevée à la puiſſance exprimée par ce chiffre, & que ce chiffre eſt ſon expoſant. Ainſi c^4 ou *cccc* qui eſt le produit de *c* trois fois par lui-même eſt dit *c* élevé à la quatriéme puiſſance, & 4 eſt ſon expoſant. Il faut bien prendre garde de confondre les chiffres qui ſervent d'expoſant avec ceux qui ſont à la gauche des lettres & ſur la même ligne, ceux-ci ſont nommés coefficiens; dans $4a^2c$, par exemple, 4 eſt le coefficient du terme, 2 eſt l'expoſant de *a*.

Et dans ce cas la lettre eſt dite élevée à la puiſſance exprimée par ce chiffre qu'on appelle expoſant.

Les chiffres qui ſont à gauche & ſur la même ligne ſont nommés coefficiens.

LXXVIII.

Soit l'Equation $\frac{2ab^2x}{3c^2d} + \frac{5ac^2}{b^2} = \frac{6cd^2}{a^2} - 3x$, en multipliant tous ſes termes par le diviſeur $3c^2d$, on aura $2ab^2x + \frac{5ac^2 \times 3c^2d}{b^2} = \frac{6cd^2 \times 3c^2d}{a^2} - 3x \times 3c^2d$.

Quatriéme exemple de réſolution d'Equations littérales.

Pour faire enſuite les multiplications indiquées par les ſignes ×, nous remarquerons d'abord que ac^2 multiplié par c^2d doit donner

pour produit ac^4d, car ſi au lieu de ac^2 & de c^2d on écrivoit acc & ccd, ainſi qu'on le pourroit, on verroit tout de ſuite que le produit de acc par ccd ſeroit $acccd$, c'eſt-à-dire ſuivant l'article précédent ac^4d. Ayant donc ac^4d pour le produit de ac^2 par c^2d, il eſt clair que $15ac^4d$ ſera celui de $5ac^2$ par $3c^2d$

De la même maniere on trouvera $18c^3d^3$ pour le produit de $6cd^2$ par $3c^2d$ & $9c^2dx$ pour celui de $3x$ par $3c^2d$. Donc l'Equation précédente ſe changera en $2ab^2x + \frac{15ac^4d}{b^2} = \frac{18c^3d^3}{a^2} - 9c^2dx$.

Multipliant enſuite cette nouvelle Equation par b^2 elle devient $2ab^4x + 15ac^4d = \frac{18b^2c^3d^3}{a^2} - 9b^2c^2dx$ & multipliant de même celle-ci par a^2, on a $2a^3b^4x + 15a^3c^4d = 18b^2c^3d^3 - 9b^2a^2c^2dx$ qui donne en tranſpoſant $2a^3b^4x + 9b^2a^2c^2dx = 18b^2c^3d^3 - 15a^3c^4d$ d'où l'on tire enfin $x = \frac{18b^2c^3d^3 - 15a^3c^4d}{2a^3b^4 + 9a^2b^2c^2d}$.

XXXIX.

Les quantités incomplexes ſont celles qui n'ont qu'un terme.

Dans les deux exemples précédens on a eu beſoin de ſçavoir multiplier des quantités exprimées par un ſimple terme telles que $4ad$, $9c^2d$ &c. qu'on appelle communément quantités incomplexes ou monomes, & l'on a trouvé en même-tems ce qu'il falloit pour faire cette opération. La méthode générale qui réſulte des raiſonnemens qu'on a employés dans

Multiplication des quantités incomplexes,

ces exemples particuliers, c'eſt de commencer par multiplier les coefficiens ; d'ajouter enſuite les expoſants des mêmes lettres & d'écrire de ſuite celles qui ſont différentes. Ainſi ſuivant cette regle $3a^5b^3d \times 7a^2bd^2 = 21a^7b^4d^3$; $\frac{9}{3}a^2cd \times \frac{2}{5}ac^3bd = \frac{18}{15}a^3c^4bd^2 = \frac{6}{5}a^3c^4bd^2$; $\frac{2}{3}ac^2de \times 9a^4fg = 6a^5c^2defg$.

tirée des deux Exemples précédens.

XL.

Cinquiéme exemple de réſolution d'Equations litterales.

Soit l'Equation $\frac{a^2c}{2b^2} + \frac{4cx}{3a} = \frac{5ab}{c} - 3a$, en multipliant tous les termes par $2b^2$ j'aurai $a^2c + \frac{8b^2cx}{3a} = \frac{10ab^3}{c} - 6ab^2$ multipliant encore tous les termes par $3a$ j'aurai $3a^3c + 8b^2cx = \frac{30a^2b^3}{c} - 18a^2b^2$ & faiſant encore la même opération pour chaſſer le diviſeur c il vient $3a^3c^2 + 8b^2c^2x = 30a^2b^3 - 18a^2b^2c$ d'où l'on tire . . . . $x = \frac{30a^2b^3 - 18a^2b^2c - 3a^3c^2}{8b^2c^2}$ qu'on peut encore écrire ainſi $x = \frac{30a^2b^3}{8b^2c^2} - \frac{18a^2b^2c}{8b^2c^2} - \frac{3a^3c^2}{8b^2c^2}$ puiſque $8b^2c^2$ diviſant toute la quantité $30a^2b^3 - 18a^2b^2c - 3a^3c^2$ diviſe chacune de ſes parties.

Or la valeur d'x, ainſi écrite, peut avoir une plus ſimple expreſſion en réduiſant chaque terme. Car 1°. au lieu de $\frac{30a^2b^3}{8b^2c^2}$ on peut mettre $\frac{15a^2b}{4c^2}$ parce qu'on peut regarder le numerateur, comme le produit de $2b^2$ par $15a^2b$

& le dénominateur comme celui de la même quantité $2b^2$ par $4c^2$, divisant donc l'un & l'autre par la même quantité $2b^2$ il vient $\frac{15a^2b}{4c^2}$; 2°. au lieu de $\frac{18a^2b^2c}{8b^2c^2}$ on peut mettre $\frac{9a^2}{4c}$ car le numerateur est le produit de $2b^2c$ par $9a^2$ & le dénominateur est le produit de la même quantité $2b^2c$ par $4c$. Au lieu de $\frac{3a^3c^2}{8b^2c^2}$ on peut mettre $\frac{3a^3}{8b^2}$. Donc la valeur d'x réduite est $\frac{15a^2b}{4c^2} - \frac{9a^2}{4c} - \frac{3a^3}{8b^2}$

XLI.

Division des quantités incomplexes tirée de cet exemple.

La méthode qu'il faudra suivre généralement dans toutes les opérations de même nature que les précédentes, c'est-à-dire dans les divisions des quantités incomplexes, est aisée à tirer de ce qu'on vient de dire, sur tout après avoir vû la multiplication des quantités incomplexes. On peut énoncer ainsi cette méthode.

Diviser d'abord les coefficiens si la division est possible, ôter les lettres qui ont les mêmes exposants aux numerateurs & aux dénominateurs, diviser ensuite les lettres qui auront des exposants différens dans le dénominateur & dans le numerateur en retranchant les plus petits exposants des plus grands, & en laissant les exposants résidus du côté où étoient les exposants les plus grands. Quant aux lettres différentes il n'y a autre chose à faire qu'à les copier.

Comme cette operation eſt très-ſouvent néceſſaire, il eſt bon de joindre ici quelques exemples pour en faciliter l'uſage aux commençans.

$$\frac{9a^5d^2b^2}{3a^4c^2d^2} = \frac{3ab^2}{c^2}, \quad \frac{18a^4bcd}{14ab^2} = \frac{9a^3cd}{7b}$$

$$\frac{27a^3b^2c^5}{3a^2bc^2} = 9abc^3, \quad \frac{5a^2b^4c^2}{15ab^3} = \frac{abc^2}{3}.$$

XLII.

Soit l'Equation $\frac{a^2x}{b-c} + dc = bx - ac$. Pour faire évanouir le diviſeur $b-c$ il faudra ainſi que ci-deſſus multiplier tous les termes par ce diviſeur, ce qui donnera $aax + \overline{b-c} \times dc = \overline{bx-ac} \times \overline{b-c}$, où j'ai obſervé 1° de mettre une barre au deſſus de $b-c$ dans le premier membre, parce que ſans cela on pourroit croire qu'il n'y auroit que c qui dut multiplier dc. 2° de mettre des barres au deſſus de $bx-ac$ & de $b-c$ dans le ſecond membre, afin qu'on voye que ce ſont ces deux quantités entieres qui doivent ſe multiplier.

Sixiéme exemple de réſolution d'Equations litterales.

C'eſt une attention qu'il faut avoir toutes les fois qu'on veut déſigner des produits ou des puiſſances de quantités complexes; au lieu d'une barre, on ſe ſert quelquefois de parentheſes. Ainſi $a^4(a+b)$; ou $a^4 \times \overline{a+b}$ ſignifient également le produit de a^4 par $a+b$; $(a+b) \times (b+d)$ ou $\overline{a+b} \times \overline{b+d}$ le produit de $a+b$ par $a+d$; $(ff+gg)^3$ ou $\overline{ff+gg}^3$ la quantité $ff+gg$ élevée à la puiſſance dont

Uſage des barres au deſſus des quantités, le même que celui des parentheſes.

l'exposant est 3, c'est-à-dire Art. XXXVII.) multipliée deux fois par elle-même.

Il s'agit maintenant de faire les multiplications indiquées par les signes $\times$. Soit proposé d'abord de multiplier dc par $b-c$, il est clair qu'il faudra multiplier dc par b & en retrancher le produit de dc par c, car $b-c$ étant plus petit que b de c, son produit par dc doit être plus petit que celui de b par c, de la quantité $c \times dc$. Donc le produit de $b-c$ par dc est $bdc-ccd$.

Venons présentement au produit de $bx-ac$ par $b-c$, pour le trouver je commence par remarquer qu'en prenant les deux termes $bx-ac$ pour une seule quantité, son produit par $b-c$ doit être, par ce qu'on vient de voir, la quantité dont le produit de $bx-ac$ par b surpasse le produit de $bx-ac$ par c. La question est donc réduite à deux multiplications de la nature de celles qu'on vient de faire & à une soustraction.

La premiere de ces deux multiplications, celle de $bx-ac$ par b, donnera $bbx-abc$; la seconde celle de $bx-ac$ par c, donnera $bcx-acc$; reste donc à retrancher cette derniere quantité de la premiere, ce qui donnera suivant l'Art. XXXIV. $bbx-abc-bcx+ac^2$ & c'est là le produit de $bx-ac$ par $b-c$.

De sorte que l'Equation $\frac{a^2x}{b-c}+cd=bx-ac$ ou $a^2x+\overline{b-c}\times cd=\overline{bx-ac}\times\overline{b-c}$ est devenue $a^2x+bcd-c^2d=b^2x-abc-bcx+ac^2$ qui par les transpositions ordinaires donnera $bcd-c^2d+abc-$

$ac^2 = b^2x - bcx - a^2x$ ou enfin ......

.... $x = \frac{bcd - ccd + abc - ac^2}{b^2 - bc - a^2}$

XLIII.

Dans cet exemple nous avons eu besoin de former une regle d'Algebre, dont nous ne nous étions pas encore servis & qui pouvant être souvent utile, merite que nous nous y arrêtions. On appelle cette regle multiplication des Polynomes. Polynome ou quantité complexe signifie en général une quantité composée de plusieurs termes. Si on veut spécifier le nombre de termes d'une quantité, on l'appelle binome lorsqu'elle en a deux, trinome lorsqu'elle en a trois, &c.

Multiplication des quantités complexes ou Polynomes tirée de l'Art. précédent.

Afin de s'exercer à la multiplication de ces sortes de quantités, il sera bon de prendre quelques exemples, soient premierement $2a^3c^2 - 5a^4b + 6a^5$ & $3ab^2 - 4bcd$ dont il s'agisse de trouver le produit.

Exemple de multiplication de Polynomes.

En raisonnant comme dans l'article précédent, on verra que puisque la quantité $3ab^2 - 4bcd$ est plus petite que $3ab^2$ de $4bcd$, son produit par $2a^3c^2 - 5a^4b$ doit être plus petit que celui de $3ab^2$ par $2a^3c^2 - 5a^4b + 6a^5$ du produit de $4bcd$ par $2a^3c^2 - 5a^4b + 6a^5$.

En conséquence j'écris d'abord ainsi le produit demandé $\overline{2a^3c^2 - 5a^4b + 6a^5} \times 3ab^2 - \overline{2a^3c^2 - 5a^4b + 6a^5} \times 4bcd$.

Faisant présentement les deux multiplications indiquées par les signes $\times$ de la même maniere que celles des quantités incomplexes, on aura $6a^4b^2c^2 - 15a^5b^3 + 18a^6b^2$ pour la valeur du premier produit $\overline{2a^3c^2 - 5a^4b + 6a^5} \times$

$3ab^2$. On aura de même $8a^3bc^3d + 20a^4b^2cd + 24a^5bcd$ pour la valeur du second produit $2a^3c^2 - 5a^4b + 6a^5 \times 4bcd$. Retranchant alors le second du premier ainsi qu'il est indiqué dans l'expression précédente, on aura $6a^4b^2c^2 - 15a^5b^3 + 18a^6b^2 - 8a^3bc^3d + 20a^4b^2cd - 24a^5bcd$ pour le produit des deux quantités proposées.

XLIV.

Si le multiplicateur de la quantité précédente outre les deux termes $3ab^2 - 4bcd$ avoit encore contenu un autre terme, $-5abc$ par exemple, il est évident que pour avoir le produit total, il auroit fallu retrancher de la quantité précédente le produit de $2a^3c^2 - 5a^4b + 6a^5$ par $5abc$. Car on auroit dit de même que le multiplicateur $3ab^2 - 4bcd - 5abc$ étant plus petit de $5abc$ que le multiplicateur $3ab^2 - 4bcd$, son produit par $2a^3c^2 + 5a^4b + 6a^5$ doit être plus petit de $5abc \times 2a^3c^2 - 5a^4b + 6a^5$ que le produit de $3ab^2 - 4bcd$ par $2a^3c^2 - 5a^4b + 6a^5$. Par la même raison s'il y avoit eu un autre terme, $3acc$ par exemple, au multiplicateur avec le signe $+$, il auroit fallu ajouter le produit $3acc \times 2a^3c^2 - 5a^4b + 6a^5$ aux produits précédens.

Principe fondamental des Multiplications.

En géneral on voit qu'un multiplicande quelconque, c'est-à-dire une quantité quelconque à multiplier, étant donné avec la quantité qui doit lui servir de multiplicateur, il faudra former tous les produits du multiplicande par chacun des termes du multiplicateur & ajouter ou retrancher

retrancher ces produits ſuivant que les termes qui les auront donnés auront le ſigne + ou le ſigne —

Pour exécuter cette operation avec autant d'ordre qu'il eſt néceſſaire, voici le procédé qu'on ſuit.

XLV.

On commence par écrire le multiplicateur ſous le multiplicande, & l'on tire une barre ſous le multiplicateur. Pour former enſuite la premiere ligne du produit que l'on doit écrire ſous cette barre, on multiplie le premier terme du multiplicateur par chacun des termes du multiplicande, en obſervant de laiſſer à chacun de ces produits, le ſigne du terme du multiplicande, ſi le premier terme du multiplicateur n'a aucun ſigne, & eſt par conſequent cenſé avoir le ſigne +.

Méthode qu'il faut ſuivre dans la Multiplication.

Pour former enſuite la ſeconde ligne qui doit être écrite ſous la premiere, on multiplie le ſecond terme du multiplicateur par tous les termes du multiplicande, & ſi ce ſecond terme du multiplicateur a encore le ſigne +, c'eſt abſolument la même operation que pour la premiere ligne, mais s'il a le ſigne —, à chacun des produits dont cette ligne eſt compoſée, on met un ſigne contraire à celui du terme du multiplicande auquel il a rapport. Toutes les autres lignes du produit étant formées de la même maniere, par le moyen des autres termes du multiplicateur multipliés par tous ceux du multiplicande, on tire une barre & l'on fait l'addition ou réduction de tous ces produits particuliers; la quantité qui vient alors eſt le produit total demandé.

Nous venons de ſuppoſer que le premier terme du multiplicateur avoit le ſigne $+$, ſi cependant il avoit le ſigne $-$, on voit bien qu'à l'égard de ce terme comme à l'égard des autres qui auroient auſſi le ſigne $-$, il faudroit obſerver de prendre les ſignes contraires à ceux des termes du multiplicande en écrivant le produit de ces termes.

XLVI.

Application de la méthode précédente à un exemple.

Afin d'éclaircir cette méthode appliquons-là à un exemple, ſoit propoſé de multiplier les deux quantités $2ab - 4ac + ad$ & $3ab - 5ac + 2ad$. La premiere étant priſe pour le multiplicande, & la ſeconde pour le multiplicateur, on écrit cette derniere ſous l'autre & on tire enſuite une barre ſous ces deux quantités; voyez la premiere caſe de la table ci-jointe.

Cela fait, on remarque que le premier terme du multiplicateur eſt cenſé poſitif, & que par conſequent tous les ſignes des termes de la premiere bande du produit doivent être les mêmes que ceux du multiplicande. On écrit donc ſuivant cette remarque à la premiere ligne ſous la barre le premier terme $6a^2b^2$ que donne le produit de $3ab$ par $2ab$ ſans l'affecter d'aucun ſigne, ce qui eſt la même choſe que ſi on lui donnoit le ſigne $+$.

On met enſuite $-$ pour le ſigne du ſecond terme de la même bande, parce que c'eſt le ſigne du ſecond terme du multiplicande, & on fait ſuivre ce $-$ de $12a^2bc$ produit de $4ac$ & de $3ab$. On conſerve de même le ſigne $+$ du troiſiéme terme du multiplicande pour le

troiſiéme terme de la premiere bande du produit, & l'on écrit pour ce terme $3a^2bd$ produit de ad & de $3ab$. La premiere bande du produit étant ainſi achevée, on remarque que le ſecond terme du multiplicateur a le ſigne $-$, & que par conſequent il faut changer tous les ſignes du multiplicande pour former les termes de la ſeconde bande du produit. Ainſi le premier terme de cette ſeconde bande doit avoir $-$ qu'on écrit donc devant le produit $10a^2bc$ des deux termes $2ab$, $5ac$.

Le ſecond terme de la même bande devant avoir $+$ puiſque le ſecond terme du multiplicande a le ſigne $-$, on écrit donc ce ſigne $+$ devant le produit $20a^2c^2$ des deux termes $4ac$, $5ac$.

Le troiſiéme terme ad du multiplicande étant précédé du ſigne $+$, le troiſiéme terme de la ſeconde bande ſera donc affecté du ſigne $-$ qu'on écrit devant le produit $5a^2cd$ des deux termes ad, $5ac$.

Quant à la troiſiéme bande du produit cherché, comme le troiſiéme terme du multiplicateur a le ſigne $+$, il faudra garder tous les ſignes du multiplicande, & par conſequent le premier terme, c'eſt-à-dire le produit de $2ab$ & de $2ad$, ſera $4a^2bd$ précédé du ſigne $+$, le ſecond, c'eſt-à-dire le produit de $4ac$ & de $2ad$ ſera $8a^2cd$ précédé du ſigne $-$, & le troiſiéme, c'eſt-à-dire le produit de $2ad$ par ad ſera $2a^2d^2$ précédé du ſigne $+$.

Afin que les Commençans puiſſent ſe fortifier dans la pratique de cette regle, j'ai joint dans

la même Table quelques autres exemples.

XLVII.

Sixiéme exemple de résolution d'Equations litterales.

Soit l'Equation $\frac{ab^2 + abd - abx}{d - c} = ax - ac$ on fera d'abord évanouir le Diviseur $d - c$ en multipliant $ax - ac$ par $d - c$; & l'on aura $ab^2 + abd - abx = \overline{ax - ac} \times \overline{d - c}$, ou $ab^2 + abd - abx = adx - acd - acx + acc$ qui, en passant tous les termes affectés d'x d'un côté & les termes connus de l'autre, deviendra $ab^2 + abd + acd - acc = abx + adx - acx$ d'où l'on tire . . . .
$x = \frac{ab^2 + abd + acd - ac^2}{ab + ad - ac}$

Dans cette expression, une certaine relation qu'on apperçoit entre les termes du Dividende & ceux du Diviseur, peut faire soupçonner que la Division se feroit exactement, & invite par consequent à tenter cette operation, qui doit paroître assez aisée à faire après avoir vû celle de la multiplication dont elle est l'inverse.

Maniere de faire la division indiquée dans cet exemple.

Pour reconnoître donc si en effet $ab + ad - ac$ peut diviser exactement $ab^2 + abd + acd - ac^2$. Soit d'abord divisé un des termes de cette derniere quantité par un de ceux de la premiere, soit divisé ab^2 par ab par exemple & soit écrit à part le quotient b. Soit ensuite multiplié ce quotient b, ou plûtôt cette premiere partie du quotient cherché, par le Diviseur total $ab + ad - ac$, & soit retranché le produit $ab^2 + abd - abc$ du dividende, le reste $ab^2 + abd + acd - ac^2 - ab^2 - abd + abc$, ou $acd - ac^2 + abc$, sera encore à diviser par le même diviseur, & son

Case 1.

$2ab - 4ac + ad$
$3ab - 5ac + 2ad$

$6a^2b^2 - 12a^2bc + 3a^2bd$
$-10a^2bc + 20a^2c^2 - 5a^2cd$
$+4a^2bd - 8a^2cd + 2a^2d^2$

$6a^2b^2 - 22a^2bc + 7a^2bd + 20a^2c^2 - 13a^2cd + 2a^2d^2$

Case 2.

$5a^3b - 2ab^3 + 4a^2c^2$
$2a^3b - ab^3 + 3a^2c^2$

$10a^6b^2 - 4a^4b^4 + 8a^5bc^2$
$-5a^4b^4 + 2a^2b^6 - 4a^3b^3c^2$
$+15a^5bc^2 - 6a^3b^3c^2 + 12a^4c^4$

$10a^6b^2 - 9a^4b^4 + 23a^5bc^2 + 2a^2b^6 - 10a^3b^3c^2 + 12a^4c^4$

Case 3.

$2a^4x^2 - 3b^4y^2$
$2a^4x^2 + 3b^4y^2$

$4a^8x^4 - 6a^4b^4x^2v^2$
$+6a^4b^4x^2y^2 - 9b^8y^4$

$4a^8x^4 - 9b^8y^4$

Case 4

$5ab + 3ac - cc$
$-5ab + 3ac - cc$

$-25a^2b^2 - 15a^2bc + 5abcc$
$+15a^2bc + 9a^2c^2 - 3ac^3$
$-5abc^2 - 3ac^3 + c^4$

$-25a^2b^2 + 9a^2c^2 - 6ac^3 + c^4$

Case 5.

$2abx - bxy + aax + 3aay$
$2ax - 3ay$

$4a^2bx^2 - 2abx^2y + 2a^3x^2 + 6a^3xy$
$-6a^2bxy + 3abxy^2 - 3a^3xy - 9a^3y^2$

$4a^2bx^2 - 2abx^2y + 2a^3x^2 + 6a^3xy - 6a^2bxy + 3abxy^2 - 3a^3xy - 9a^3y^2$

quotient devra être ajouté au précédent b pour former le quotient total cherché.

Pour faire cette divifion je prends encore un des termes de la quantité $acd - ac^2 + abc$ qui refte à divifer, & je le divife par un de ceux du Divifeur. Je choifis acd, par exemple, pour le divifer par ad. Or cette divifion me donne c; je multiplie donc encore ce nouveau quotient par le divifeur total $ab + ad - ac$ & je retranche le produit $abc + acd - ac^2$ du dividende reftant $acd - ac^2 + abc$ & comme les deux quantités font les mêmes & qu'il ne refte par conféquent rien à divifer, je vois par là que $b + c$ eft exactement le quotient de la divifion de $ab^2 + abd + acd - ac^2$ par $ab + ad - ac$ & partant la valeur d'x.

XLVIII.

Après avoir fait la divifion précédente, on voit à peu-près comment on doit fe conduire dans les autres exemples. Pour operer dans la divifion avec un certain ordre, on écrit ordinairement le divifeur à droite du Dividende en les féparant d'une barre verticale, ainfi que dans la divifion Arithmetique. Ayant choifi dans le Dividende un terme qui puiffe fe divifer par un de ceux du divifeur, on écrit le quotient de ces deux termes fous le divifeur, & on lui donne $+$ pour figne, fi les deux termes qu'on a divifé l'un par l'autre ont le même figne, on lui donne au contraire le figne $-$, fi ces deux termes font de fignes differens. Cela fait on multiplie ce quotient par tous les termes du divifeur, & on écrit le produit qui en vient fous le dividende.

Méthode générale pour les divifions des quantités complexes.

Mais comme l'ufage de ce produit doit être de le retrancher du dividende, on obferve en l'écrivant fous ce dividende, de mettre à chaque terme le figne contraire de celui que donneroit la multiplication.

Ce produit étant ainfi écrit, on tire une barre & l'on fait la réduction avec le Dividende, & la quantité qui refte eft à divifer de nouveau par le même divifeur. On y choifit de même un terme qui puiffe fe divifer par un de ceux du divifeur, & on écrit le terme qui en vient pour quotient à côté du premier, en obfervant de lui donner le figne + ou le figne — fuivant que les deux termes qu'on aura divifés, feront de même ou de différens fignes. On multiplie enfuite ce terme par tous ceux du divifeur, & on écrit le produit fous la quantité à divifer, en obfervant de même que la premiere fois de changer les fignes que la multiplication donne. Tirant alors une barre & réduifant, fi tous les termes ne fe détruifent pas, on écrit le refte fous cette barre & on pouffe l'opération de la même maniere jufqu'à ce que tous les termes du dividende foient évanouis.

Dans cette operation on pourroit quelquefois être embarraffé à choifir parmi les termes du dividende & du divifeur, ceux qui doivent fervir à former les termes du quotient. Afin d'éviter tout tatonnement dans ce choix, voici ce qu'on a imaginé.

Maniere d'éviter tout tatonnement dans la divifion.

On choifit d'abord à volonté une lettre qui fe trouve dans le dividende & dans le divifeur, & l'on difpofe les termes de ces deux quantités

de maniere que les premiers ſoient ceux où cette lettre a le plus grand expoſant, que le ſecond ſoit celui ou la même lettre a le plus grand expoſant après le premier & ainſi des autres termes. Ayant donc ordonné les deux quantités propoſées par rapport à la même lettre, (c'eſt ainſi qu'on appelle cette operation) on n'a plus aucun tatonnement à faire pour choiſir les termes qui doivent ſe diviſer, c'eſt toujours les premiers du dividende & du diviſeur qu'il faut prendre.

Ce que c'eſt qu'ordonner une quantité par rapport à une lettre.

Lorſqu'on aura formé par ces deux premiers termes du diviſeur & du dividende le premier terme du quotient, & qu'on aura écrit avec des ſignes différens, le produit ſous le dividende, s'il arrive que cette operation ait introduit des termes qui n'ayent point de ſemblables dans le dividende, Il faudra, en écrivant la quantité qui vient après la réduction, avoir l'attention de les placer de maniere que la quantité qui reſte à diviſer, reſte toujours ordonnée par rapport à la même lettre que le diviſeur.

XLIX.

Afin de faciliter aux commençans l'uſage de cette méthode, prenons quelques exemples. Suppoſons d'abord qu'il s'agiſſe de diviſer la quantité $31aabb + 2a^4 + 24b^4 - 38ab^3 - 13a^3b$ par la quantité $-3ab + 2aa + 4bb$.

Application de la méthode précédente à un exemple.

Ayant écrit ces deux quantités, comme on les voit dans la Table cy-jointe (caſe 1[ere]), où elles ſont ordonnées par rapport à la lettre a, je diviſe le premier terme $2a^4$ du dividende par le premier $2aa$ du diviſeur, & j'écris le

quotient aa ſous le diviſeur ſans lui donner aucun ſigne, c'eſt-à-dire que je le fais poſitif à cauſe que les termes $2a^4$, & $2aa$ ſont précédés des mêmes ſignes. Le quotient aa étant écrit, je le multiplie par tous les termes du diviſeur, & comme cette multiplication doit me donner pour premier terme $2a^4$ produit de aa par $2aa$ avec le ſigne $+$, je porte ce terme ſous le dividende avec le ſigne $-$ à cauſe qu'il doit être rétranché.

De même le ſecond terme $3ba^3$ produit de aa par $3ba$ devant avoir le ſigne $-$ par la multiplication; j'écris ſous le dividende $+3ba^3$ par la raiſon qu'il doit être ſouſtrait. Enfin par ce que le troiſiéme terme $4b^2a^2$ produit de aa par $4bb$ devroit avoir par la multiplication le ſigne $+$ je lui donne le ſigne $-$ en l'écrivant ſous le dividende.

Cela fait je tire une barre & je reduis, la quantité qui reſte alors eſt $-10ba^3 + 27b^2a^2 - 38b^3a + 24b^4$ qu'il faut diviſer par le même diviſeur $2a^2 - 3ba + 4bb$. Pour faire cette diviſion je prens le premier terme $10ba^3$ de cette quantité à diviſer, & je le diviſe par le premier terme $2a^2$ du diviſeur, il vient $5ba$ pour quotient auquel je donne le ſigne $-$ à cauſe que les termes $10ba^3$ & $2a^2$ ne ſont pas précédés des mêmes ſignes. Ayant écrit $-5ba$ à côté de a^2, il s'agit de multiplier ce nouveau terme du quotient par tous ceux du diviſeur, & d'en changer les ſignes en les écrivant ſous la quantité à diviſer.

Je multiplie donc d'abord $5ba$ par $2a^2$ &

comme le produit devroit être negatif à cauſe que le ſigne — de $5\,ba$ doit changer, ſuivant les regles de la multiplication, les ſignes du multiplicande $2a^2 - 3ba + 4b^2$ & que ſuivant ce que nous venons de dire les produits doivent être changés de ſigne lorſqu'on les écrit ſous la quantité à diviſer, j'écris $+ 10\,ba^3$ ſous cette quantité. De même au lieu de donner à $15bbaa$, produit de $3\,ba$ par $5ba$, le ſigne $+$ que l'on auroit par la multiplication je l'écris avec le ſigne — ſous la quantité à diviſer. Enfin au lieu de donner à $20\,b^3a$ produit de $5ba$ par $4\,bb$ le ſigne — que demanderoit la multiplication je l'écris avec le ſigne $+$ ſous la quantité à diviſer. Je tire alors une barre & je reduis, ce qui me donne $12\,b^2a^2 - 18\,b^3a + 24\,b^4$ quantité encore à diviſer par $2\,a^2 - 3ba + 4bb$.

Pour faire cette nouvelle diviſion, je diviſe le terme $12b^2a^2$ par $2\,a^2$ & j'ai, pour troiſiéme terme du quotient, $6\,bb$ que j'écris à côté des deux premiers en lui donnant le ſigne $+$ à cauſe que $12\,b^2a^2$ & $2\,aa$ ont le même ſigne.

Multipliant préſentement $6\,b^2$ par $2\,a^2$ j'ai $12\,b^2a^2$ auquel je donne le ſigne — en l'écrivant ſous la quantité à diviſer, à cauſe que la multiplication lui auroit donné le ſigne $+$. De même multipliant $6\,b^2$ par $3\,ba$ j'ai $18\,b^3a$ auquel je donne le ſigne $+$ en l'écrivant ſous la quantité à diviſer, à cauſe que la multiplication lui auroit donné le ſigne —. Enfin multipliant $6\,bb$ par $4b^2$ j'ai $24\,b^4$ auquel je donne le ſigne — contraire à celui que donneroit la multiplication. Réduiſant alors je vois que tous

les termes ſe détruiſent. Donc la diviſion eſt exacte. Donc le quotient cherché eſt $aa - 5ba + 6bb$.

L.

Autre exemple.

Qu'on ſe propoſe maintenant de diviſer $6b^3c - b^4 - 9ccbb + 4c^4$ par $-3cb + bb + 2cc$. J'écris ces deux quantités ſous la forme qu'on voit dans la ſeconde caſe de la Table ſuivante, en les ordonnant par rapport à la lettre c.

Diviſant alors les deux premiers termes j'ai $2cc$ pour le premier terme du quotient lequel étant multiplié par le diviſeur donne, en changeant les ſignes, la quantité $-4c^4 + 6bc^3 - 2bbcc$ qui étant placée ſous le dividende, donne pour reſte $6bc^3 - 11bbcc + 6b^3c - b^4$ dans laquelle j'ai obſervé que le terme bc^3 affecté de c^3 introduit par la multiplication, fut placé le premier afin que la quantité reſtat ordonnée par rapport à c. Diviſant alors ce premier terme $6bc^3$ par $2cc$ j'ai $3bc$ pour quotient avec le ſigne $+$. Je multiplie de même ce nouveau terme du quotient par le diviſeur, & je porte les termes qui en viennent ſous le dividende en changeant leurs ſignes. Faiſant la réduction enſuite, Je n'ai plus que $-2bbcc + 3b^3c - b^4$ à diviſer, le premier terme de cette quantité étant diviſé par celui du diviſeur, donne pour troiſiéme terme du quotient b^2 affecté du ſigne $-$ à cauſe que les termes $2b^2c^2$ & $2c^2$ ſont de differens ſignes, & comme le produit de ce troiſiéme terme par le diviſeur détruit tous ceux de la quantité à diviſer, je conclus

que la diviſion eſt exacte & que $2cc + 3bc - b^2$ eſt le quotient demandé.

L I.

Lorſqu'on veut ordonner le dividende & le diviſeur par rapport à une même lettre, ſi on trouvoit pluſieurs termes où cette lettre, fut élevée à la même puiſſance, on tomberoit encore dans l'inconvenient du tatonnement, à moins qu'on n'ordonnat encore ces termes par rapport à une autre lettre commune aux deux quantités.

Attention qu'il faut avoir en ordonnant lorſqu'il y a pluſieurs lettres.

Suppoſons par exemple que le dividende étant ordonné par rapport à la lettre d on eut de ſuite $3accd^3 - c^3d^3 - 3aacd^3 + a^3d^3$ pour les premiers termes du dividende, & que dans le diviſeur on eut de même $aad^2 + ccd - 2acd^2$ pour les premiers termes, en arrangeant ainſi ces deux quantités $a^3d^3 - 3caad^3 + 3ccad^3 - c^3d^3$; $a^2d^2 - 2cad^2 + ccd^2$ c'eſt-à-dire en les ordonnant par rapport à la lettre a, il n'y auroit aucun tatonnement à craindre en faiſant la diviſion, pourvû qu'on obſervat, à chaque fois qu'on voudroit trouver un terme du quotient, que la quantité à diviſer fut toujours ordonnée de la même maniere. Pour exercer les commençans à ces attentions dans la diviſion, j'ai joint encore quelques exemples dans la Table ſuivante.

L I I.

Dans la ſolution des Problêmes précédens nous n'avons eu beſoin que d'une ſeule inconnue, parce qu'il n'y avoit à proprement parler dans ces Problêmes qu'une quantité à trou-

ver. Mais comme en avançant dans la ſcience de l'Algebre, on trouve des Problêmes où l'on eſt obligé d'employer pluſieurs inconnues, nous allons voir comment on les traite.

Problême dans lequel on employe deux inconnues.

Etant données les péſanteurs ſpécifiques de deux matieres qui entrent dans un mixte, le volume & le poids total du mixte, trouver ce qu'il entre de chacune de ces deux matieres dans le mixte.

Que le nombre de pouces cubes contenus dans ce mixte, ou en général ſon volume de quelque maniere qu'il ſoit meſuré ſoit exprimé par . . . . a.

Que ſon poids total ſoit exprimé par . . . . . b.

Que la quantité de la premiere matiere contenue dans le mixte, par exemple ce qu'il y a de pouces cubes de cette matiere, ſoit exprimé par . . . . x.

Que le poids d'un pouce cube de cette matiere ou en général ſa péſanteur ſpécifique ſoit c.

La quantité de la ſeconde matiere . . . . . . y.

Sa péſanteur ſpécifique . . . . d.

On aura pour le poids de la quantité de la premiere matiere qui entre dans le mixte . . cx

Car ſi x exprime le nombre de pouces cubes de cette matiere, & c le poids de chaque pouce cube, leur poids total ſera le produit de ces deux nombres. On aura de même pour le poids de la quantité de la ſeconde matiere.. dy.

Or comme ces deux poids doivent étant ajoutés faire le poids total du mixte, on a donc l'Equation

$$cx + dy = b$$

$$\begin{array}{l|l}
2a^4 - 13ba^3 + 31b^2a^2 - 38b^3a + 24b^4 & 2a^2 - 3ba + 4b^2 \\
-2a^4 + 3ba^3 - 4b^2a^2 & a^2 - 5ba + 6b^2 \\
\hline
-10ba^3 + 27b^2a^2 - 38b^3a + 24b^4 & \\
+10ba^3 - 15b^2a^2 + 20b^3a & \\
\hline
+12b_2a^2 - 18b^3a + 24b^4 & \\
-12b^2a^2 + 18b^3a - 24b^4 & \\
\hline
0 &
\end{array}$$

Case 1.

$$\begin{array}{l|l}
4c^4 - 9bbcc + 6b^3c - b^4 & 2cc - 3bc + bb \\
-4c^4 + 6bc^3 - 2bbcc & 2cc + 3bc - bb \\
\hline
6bc^3 - 11b^2c^2 + 6b^3c - b^4 & \\
-6bc^3 + 9b^2c^2 - 3b^3c & \\
\hline
-2b^2c^2 + 3b^3c - b^4 & \\
+2b^2c^2 - 3b^3c + b^4 & \\
\hline
0 &
\end{array}$$

Case 2.

$$\begin{array}{l|l}
a^3d^3 - 3ca^2d^3 + 3c^2ad^3 - c^3d^3 + c^2a^2d^2 - c^3ad^2 & a^2d^2 - 2cad^2 + c^2d^2 + ac^2d \\
-a^3d^3 + 2ca^2d^3 - c^2ad^3 \quad - c^2a^2d^2 & ad - cd \\
\hline
-ca^2d^3 + 2c^2ad^3 - c^3d^3 - c^3ad^2 & \\
+ca^2d^3 - 2c^2ad^3 + c^3d^3 + c^3ad^2 & \\
\hline
0 &
\end{array}$$

Case 3.

$$\begin{array}{l|l}
a^2b^4 - c^2b^4 - ca^2b^3 + 5c^2ab^3 - 6ccaabb + 2c^3abb - c^4ab + c^6 & ab^2 - cb^2 + 2cab + c^3 \\
-a^2b^4 + cab^4 - 2ca^2b^3 \quad - c^3abb & ab^2 + cb^2 - 3cab + c^3 \\
\hline
cab^4 - c^2b^4 - 3ac^2b^3 + 5c^2ab^3 - 6ccaabb + c^3abb - c^4ab + c^6 & \\
-cab^4 + c^2b^4 \quad - 2c^2ab^3 \quad - c^4bb & \\
\hline
-3ca^2b^3 + 3c^2ab^3 - 6c^2a^2b^2 + c^3ab^2 - c^4bb - c^4ab + c^6 & \\
+3ca^2b^3 - 3c^2ab^3 + 6c^2a^2b^2 \quad + 3c^4ab & \\
\hline
c^3ab^2 - c^4bb + 2c^4ab + c^6 & \\
-c_3ab^2 + c^4bb - 2c^4ab - c^6 & \\
\hline
0 &
\end{array}$$

Case 4.

$$\begin{array}{l|l}
6b^2a^2 - dba^2 - d^2a^2 + cb^2a + 7dcba - 12c^2b^2 & 2ba - da + 3cb \\
-6b^2a^2 + 3dba^2 \quad - 9cb^2a & 3ba + da - 4cb \\
\hline
2dba^2 - d^2a^2 - 8cb^2a + 7dcba - 12c^2b^2 & \\
-2dba^2 + d^2a \quad - 3dcba & \\
\hline
-8cb^2a + 4dcba - 12c^2b^2 & \\
+8cb^2a - 4dcba + 12c^2b^2 & \\
\hline
0 &
\end{array}$$

Case 5.

mais cette Equation ne ſçauroit ſuffire pour réſoudre le Problême, car ſi on veut en dégager l'une des inconnues, x, par exemple, on trouve

$$x = \frac{b - dy}{c}$$

qui ne peut apprendre à connoître x qu'en ſuppoſant qu'on connoiſſe y. Il faut donc encore quelqu'autre opération pour connoître y. Pour y parvenir, il faut voir ſi on a fait attention à tout ce qu'on demandoit dans l'énoncé de la queſtion, ou, pour parler comme les Algebriſtes, ſi on a rempli toutes les conditions du Problême; pour peu qu'on y reflechiſſe, on verra qu'on n'a exprimé qu'une des deux conditions, celle que le poids total du mixte ſoit b, & qu'on n'a pas employé celle qui nous apprend que la quantité de la premiere matiere ajoutée avec la quantité de la ſeconde doit faire le volume total. On aura donc par cette ſeconde condition l'Equation

$$x + y = a$$

qui, ainſi que la premiere, ne nous apprend la valeur de x, qu'au moyen de celle de y, en nous donnant $x = a - y$.

Mais ſi on ne peut pas par aucune de ces deux Equations priſes ſéparément trouver x indépendamment de y, on trouve bien-tôt en ſe ſervant à la fois de l'une & de l'autre, le moyen d'avoir y entierement connu. Car puiſque chacune de ces deux Equations donne une valeur de x, on peut égaler ces deux valeurs, ce qui donne l'Equation.

$$\frac{b-dy}{c}=a-y$$

de laquelle on tire par les méthodes précédentes $b-dy=ac-cy$ ou $ac-b=cy-dy$, ou enfin $y=\frac{ac-b}{c-d}$.

y étant connû on voit bien que x qui est également $a-y$ ou $\frac{b-dy}{d-c}$ est connu aussi. On n'a donc qu'à mettre dans celle qu'on voudra de ces deux quantités, dans la premiere $a-y$ par exemple, à la place de y, $\frac{ac-b}{d-c}$, & l'on aura $a-\frac{ac-b}{c-d}$ pour la valeur de x.

En examinant la valeur précédente $a-\frac{ac-b}{c-d}$ on découvre bien-tôt qu'on peut la réduire, car si on veut mettre a au même dénominateur que la fraction $\frac{ac-b}{c-d}$, il faut le multiplier par $c-d$, ce qui donne $\frac{ac-ad}{c-d}$ au lieu de a, ainsi il ne s'agit plus que de retrancher de cette fraction la seconde $\frac{ac-b}{c-d}$, retranchant pour cela leurs numérateurs, & divisant le reste par le denominateur commun on aura $\frac{ac-ad-ac+b}{c-d}$ ou $\frac{b-ad}{c-d}$ pour la valeur réduite de x.

Les quantités demandées, tant de la premiere que de la seconde matiere qui entrent dans le mixte, sont donc exprimées l'une par $\frac{ac-b}{c-d}$ & l'autre par $\frac{b-ad}{c-d}$, ainsi le Problême est résolu.

LIII.

Si au lieu de ſubſtituer la valeur $\frac{ac-b}{c-d}$ de y dans $a-y$, on l'avoit ſubſtituée dans $\frac{b-dy}{c}$ qui eſt également la valeur de x on auroit eu $\frac{b-d\times\overline{\frac{ac-b}{c-d}}}{c}$ qui d'abord ne paroît gueres être la même valeur que $\frac{b-ad}{c-d}$. Mais comme on ſçait que les valeurs $a-y$ & $\frac{b-dy}{c}$ de x ſont égales, & que ce n'eſt même que parce qu'elles le ſont qu'on a déterminé la valeur de y, on doit être sûr qu'en examinant ces deux dernieres valeurs de x exprimées en quantités connues, on trouvera leur identité. Voici comment, on peut parvenir à réduire l'uneà l'autre.

On donnera d'abord le denominateur $c-d$ à la lettre b, ce qui ſe fera en la multipliant par $c-d$, c'eſt-à-dire en mettant $\frac{bc-bd}{c-d}$ au lieu de b, & alors la quantité précédente $\frac{b-\frac{d\times\overline{ac-b}}{c-d}}{c}$ ſe changera en $\frac{\frac{bc-bd-d\times\overline{ac-b}}{c-d}}{c}$ ou $\frac{bc-bd-d\times\overline{ac-b}}{cc-dc}$, mais au lieu $d\times\overline{ac-b}$ on peut écrire $acd-bd$, & comme cette quantité doit être retranchée de $bc-bd$, la quantité précédente $\frac{bc-bd-d\times\overline{ac-b}}{cc-dc}$ deviendra donc en réduiſant, $\frac{bc-dca}{c^2-dc}$ qui en diviſant le numerateur & le dénominateur par la même quan-

tité c, devient enfin $\frac{b-da}{c-d}$ même valeur que cy-deſſus.

LIV.

Application de la ſolution précédente à un exemple.

Pour faire préſentement une application de la ſolution générale qu'on vient de trouver, ſuppoſons que le mixte ſoit compoſé d'or & d'argent, * que ſon poids total ſoit de 30 onces, ſon volume de 3 pouces cubes, le poids du pouce cube d'or de $12\frac{2}{3}$ onces, celui du pouce cube d'argent de $6\frac{8}{9}$ onces on aura $a = 3$, $b = 30$, $c = 12\frac{2}{3}$, $d = 6\frac{8}{9}$ ſubſtituant donc ces valeurs dans les deux formules générales $x = \frac{b-da}{c-d}$ & $y = \frac{ac-b}{c-d}$ elles deviendront $x = \frac{21}{13}$ & $y = \frac{18}{13}$ c'eſt-à-dire que le mixte contiendra $\frac{21}{13}$ pouces cubes d'or & $\frac{18}{13}$ pouces cubes d'argent.

LV.

On découvre aiſément par ce qu'on a vû dans le Problême précédent, que toutes les fois qu'on aura employé deux inconnues dans une queſtion, il faudra deux Equations pour les dégager; & que lorſqu'on demande deux quantités dans un Problême, il faut auſſi qu'on donne deux conditions pour les déterminer, afin qu'on

* Le Problême qu'Archimede eut à réſoudre, lorſqu'on lui propoſa de déterminer la quantité d'argent qui étoit allié avec l'or dans la Couronne du Roi Hieron, ne pouvoit pas être autre choſe que celui qu'on vient de voir auſſi-tôt qu'il eut déterminé la péſanteur ſpécifique du metal de cette Couronne, ce qu'il fit en examinant de combien elle perdoit de ſon poids en la péſant dans l'eau.

puiſſe

puisse tirer de ces deux conditions les deux équations nécessaires. Pour montrer à employer ces conditions nous donnerons encore le Problême suivant.

LVI.

Deux sources qui coulent chacune uniformement, ont rempli ensemble un reservoir a, *l'une en coulant pendant un tems* b, *l'autre pendant un tems* c; *les deux même sources ont rempli un autre reservoir* d, *la premiere coulant pendant le tems* e, *la seconde pendant le tems* f: *on demande la dépense de chacune de ces sources.*

Autre Problême où l'on employe deux inconnues.

Soient x & y ces dépenses, c'est-à-dire, par exemple, ce que chacune de ces deux sources fourniroit de muids d'eau par jour en supposant que les réservoirs a & d fussent mesurés en muids pendant que les tems b, c, e, f, seroient comptés en jours.

On aura bx pour la quantité d'eau fournie par la premiere source pendant le tems b; & de même cy pour la quantité d'eau fournie par la seconde source dans le tems c. Mais ces deux quantités d'eau par la premiere condition du Problême doivent être égales au reservoir a, on a donc l'Equation

$$bx + cy = a$$

On aura de même ex, fy pour les quantités d'eau fournies par les mêmes sources pendant les tems e, f, & par consequent la seconde condition donnera

$$ex + fy = d$$

Il ne s'agit plus maintenant que de tirer de ces deux Equations les valeurs de x & de y

ce qui ſe fera, ainſi que dans le Problême précédent, en tirant une valeur de x en y de chacune de ces deux Equations & en les égalant enſuite. La premiere ſera $\frac{a-cy}{b}$ la ſeconde $\frac{d-fy}{e}$ égalant donc ces deux valeurs on aura $\frac{a-cy}{b}=\frac{d-fy}{e}$ ou $ae-cey=bd-bfy$, ou $ae-bd=cey-bfy$ ou enfin

$$y=\frac{ae-bd}{ce-bf}.$$

Subſtituant cette valeur de y dans l'une des deux valeurs précédentes de x, dans $\frac{a-cy}{b}$ par exemple, il viendra $x=\frac{\overline{a-c\times\frac{ae-bd}{ce-bf}}}{b}$ ou $x=\frac{a\times\overline{ce-bf}-c\times\overline{ae-bd}}{b\times\overline{ce-bf}}$ en mettant le premier terme a au même dénominateur que le ſecond, & en multipliant les deux dénominateurs l'un par l'autre.

Faiſant enſuite les multiplications indiquées dans cette valeur & réduiſant on aura

$$x=\frac{cd-af}{ce-bf}.$$

Il n'eſt donc plus queſtion maintenant que d'avoir les valeurs particulieres de a, b, c, d, e, f, pour les ſubſtituer dans ces deux valeurs générales de x & de y, afin d'en tirer telle ſolution particuliere qu'on voudra.

Au lieu de commencer par dégager x dans les deux Equations précédentes, & d'égaler les deux valeurs qu'elles donnent, afin d'avoir y il eſt clair qu'on pouvoit également commen-

cer par dégager y en égalant enſuite ſes deux différentes valeurs pour en tirer x, & que par cette opération on ſeroit parvenu néceſſairement au même reſultat.

LVII.

Exemple du Problême précédent en nombres.

Pour faire préſentement quelque application de ce Problême, ſuppoſons que la premiere ſource ayant coulé deux jours & la ſeconde trois, elles ayent rempli un reſervoir de 195 muids. Enſuite que la premiere ſource ayant coulé cinq jours, & la ſeconde quatre, elles ayent rempli un reſervoir de 330 muids.

On aura donc $a = 195$, $b = 2$, $c = 3$ $d = 330$, $e = 5$, $f = 4$ & par conſequent $dc - af = 210$, $ce - bf = 7$, $ae - db = 315$ d'où $x = \frac{dc-af}{ce-bf} = \frac{210}{7} = 30$

$$\& y = \frac{ae-bd}{ce-bf} = \frac{315}{7} = 45$$

ainſi la premiere ſource dans cet exemple fournit 30 muids par jour & la ſeconde 45.

LVIII.

Autre exemple.

Suppoſons préſentement que la premiere ſource ayant coulé pendant 4 jours & la ſeconde pendant 6 jours, elles ayent rempli un reſervoir de 120 muids. Enſuite que la premiere ayant coulé 3 jours & la ſeconde 7, elles ayent rempli un reſervoir de 190 muids.

On aura dans ce cas $a = 120$, $b = 4$, $c = 6$ $d = 190$, $e = 3$, $f = 7$ & par conſequent $dc - af = 300$, $ce - bf = -10$, $ae - bd = -400$

ce qui donnera $x = \frac{dc-af}{ce-bf} = \frac{300}{-10}$

& $y = \frac{ae-db}{ce-bf} = \frac{-400}{-10}$

Singularité des expressions où l'on arrive dans cet exemple.

La premiere fois qu'on aura trouvé de semblables valeurs, c'est-à-dire des quantités négatives divisées par des quantités négatives, & des positives divisées par des négatives, on aura dû être embarrassé à sçavoir ce qu'elles devoient signifier, & ceux qui auront craint de faire de mauvais argumens methaphysiques, auront cherché à reprendre la question un peu plus haut, afin d'éviter ces sortes de divisions; Voici, par exemple, ce qu'on aura pû faire pour cela dans cette question cy.

Maniere de reconnoître ce qu'elles peuvent signifier.

On aura repris les deux Equations générales $bx + cy = a$, & $ex + fy = d$, & substituant dans ces équations pour a, b, c, d, e, f, les valeurs que ces lettres ont dans cet exemple on aura eu $4x + 6y = 120$ & $3x + 7y = 190$. Tirant de ces Equations $x = 30 - \frac{3y}{2}$ & $x = \frac{190}{3} - \frac{7}{3}y$, on aura égalé ces deux valeurs, ce qui aura donné $30 - \frac{3y}{2} = \frac{190}{3} - \frac{7y}{2}$ ou $\frac{7}{3}y - \frac{3}{2}y = \frac{190}{3} - 30$ ou $y = 40$.

Substituant ensuite cette valeur de y dans $30 - \frac{3}{2}y$ valeur de x, on aura eu $x = 30 - 60$, c'est-à-dire $x = -30$. Par cette voye on aura vû, sans en pouvoir douter, que le quotient de -400 par -10 est $+40$, & que celui de $+300$ par -10 est -30.

LIX.

Théoremes généraux

On aura bien-tôt après regardé comme des

principes généraux que
le + divisé par le + donnoit le +
le + divisé par le — donnoit le —
le — divisé par le + donnoit le —
le — divisé par le — donnoit le +
& de même pour la multiplication.

concernant les signes des quotients ou des produits.

Ces principes auront été d'autant plus faciles à imaginer qu'on y étoit comme conduit, par les reflexions qu'on avoit dû faire sur les signes qu'on trouvoit aux termes des produits & des quotients, en pratiquant les préceptes donnés pour la multiplication & pour la division des quantités complexes.

Mais s'il est facile qu'on se doute pour ainsi dire des ces principes, on sent bien aussi qu'on ne sçauroit les affirmer qu'après y avoir fait beaucoup de reflexions, & il y a apparence que les premiers Analystes n'en auront été surs qu'après les avoir verifiés dans beaucoupd'exemples.

LX.

On démontre que $-b$ par $-d$ est $+bd$; quoique ces quantités ne soient précédées de rien.

Pour nous assurer que la multiplication de — par — doit toujours donner + au produit, voyons quelle lumiere nous pouvons tirer de la méthode générale des multiplications donnée Art. XLV. Suivant cette méthode on voit très-clairement que le produit d'une quantité telle que $a-b$ par une autre $c-d$ doit être $ac-bc-ad+bd$, & on voit par consequent en même tems que le terme bd qui est venu par la multiplication de b & de d a le signe +, tandis que ses produisans b & d ont le signe —. Il ne reste donc plus qu'à sçavoir si lorsque deux quantités négatives telles que $-b$ & $-d$ ne se-

ront précédées d'aucune quantité poſitive, leur produit ſera encore $+ bd$. Or c'eſt ce dont il eſt facile de reconnoître la vérité, puiſque la méthode par laquelle on a découvert que le produit de $a - b$ par $c - d$ étoit $ac - bc - ad + bd$ ne ſpecifiant aucune grandeur particuliere ni à a ni à b, doit avoir encore lieu lorſque ces quantités ſont égales à zero; or en ce cas le produit $ac - bc - ad + bd$ ſe reduit à $+ bd$, donc $- b \times - d = + bd$.

LXI.

Les autres cas ſe démontreroient de même.

Quant aux autres cas, c'eſt-à-dire à la multiplication & à la diviſion de $+$ par $-$ on les juſtifieroit de la même maniere.

LXII.

Comment la valeur negative qu'on a trouvée reſout le Problême.

Pour revenir préſentement à notre derniere application du Problême précédent, remarquons qu'après avoir trouvé que $x = - 30$ & $y = + 40$, on a dû avoir encore une autre eſpece d'embarras, c'étoit de ſçavoir ce que ſignifioit cette valeur de x, pour le découvrir ſurement, le chemin qu'il eſt vraiſemblable qu'on aura tenu, c'eſt de remonter aux conditions du Problême ou, ce qui revient au même, aux Equations $4x + 6y = 120$ & $3x + 7y = 190$ qui les expriment alors, & de voir comment les valeurs $- 30$ & $+ 40$ de x & de y conviennent à ces Equations. On trouve premierement que $4x$ doit être en ce cas $- 120$ & que $6y$ eſt 240, d'où par conſequent $4x + 6y$ eſt $- 120 + 240$ qui eſt en effet égal à 120. On trouve de même que $3x + 7y$ eſt $- 90 + 280$ qui ſe réduit à 190.

Voyant donc comment les valeurs -30 & $+40$ de x & de y, ſatisfont aux Equations $4x+6y=120$ & $3x+7y=190$, on découvre en méme-tems comment elles ſatisfont aux conditions du Problême; car puiſque l'uſage que l'on fait des quantités $4x$ & $3x$ qui expriment alors les quantités d'eau depenſées par la premiere ſource, dans la premiere & dans la ſeconde opération, eſt de les retrancher de $6y$ & de $7y$ qui expriment les quantités d'eau fournies dans les mêmes opérations par la ſeconde ſource, il faut que dans ce cas, on regarde la premiere ſource comme dérobant de l'eau aux reſervoirs, au lieu d'en fournir comme elle faiſoit dans l'autre exemple, & comme on l'avoit ſuppoſé en exprimant les conditions du Problême.

L'on voit en cette occaſion un exemple de la généralité de l'Analyſe qui fait trouver dans une queſtion des cas que l'on n'avoit pas prévû dabord pouvoir y être renfermés.

LXIII.

Les inconnues devenant négatives, doivent être priſes dans un ſens différent de celui de l'énoncé du Problême.

Dans preſque toutes les queſtions réſolues généralement, on a trouvé des cas de même nature que le précédent, & l'on en a toujours conclu, que lorſque la valeur de l'inconnue devenoit négative; la quantité qu'elle exprimoit devoit être priſe dans un ſens contraire à celui ſuivant lequel on l'avoit employée en exprimant les conditions du Problême.

Ce qu'on vient de dire des inconnues, ſe doit dire auſſi des connues, c'eſt-à-dire que dans

Il en est de même des connues.

les applications qu'on fera d'une solution générale, si on fait négatives quelques-unes des quantités données a, b, &c. dans les Problêmes, cela signifiera que dans l'application particuliere, ces quantités doivent être prises dans un sens contraire à celui suivant lequel on les prenoit dans la solution generale.

LXIV.

Exemple de l'usage des quantités connues faites négatives.

Qu'on se propose, par exemple, de trouver quelles doivent être dans le Problême précédent les dépenses des deux sources, pour que la seconde fournissant de l'eau pendant 6 jours tandis que la premiere en dérobe pendant 3 jours, un reservoir de 180 muids soit rempli; & que la premiere source ensuite fournissant de l'eau pendant 3 jours & la seconde pendant 4 jours, un reservoir de 320 muids soit rempli.

On n'aura qu'à faire dans la solution générale $a = 180$, $b = -3$, $c = 6$, $d = 320$, $e = 3$, $f = 4$.

Et l'on aura $dc = 1920$, $af = 720$, $ce = 18$, $bf = -12$, $ae = 540$, $db = -960$, & par conséquent $dc - af = 1200$, $ce - bf = 30$, $ae - db = 1500$, qui donnent $x = \frac{dc - af}{ce - bf} = 40$ & $y = \frac{ae - db}{ce - bf} = 50$, par lesquelles on apprend que la dépense de la premiere source est de 40 muids par jour, soit pour dérober comme elle fait dans la premiere opération, soit pour fournir ainsi qu'il lui arrive dans la seconde; & que la dépense de la seconde est de 50 muids par jour qu'elle

fournit dans chacune des deux opérations. Il étoit si naturel d'imaginer que b devoit être négatif dans cette application, & si aisé de s'en assurer en remontant à l'usage qu'on fait de cette lettre en exprimant les conditions du Problême, qu'il est inutile de s'arrêter à le faire voir.

LXV.

Pour faciliter aux Commençans la maniere d'étendre les solutions des Problêmes aux cas où les quantités données sont prises dans un sens contraire à celui où elles avoient été prises d'abord, nous prendrons encore un exemple dans un autre Problême que le précédent, nous reprendrons le Problême de l'art. XXIV. où il s'agit de trouver la rencontre de deux Courriers, & nous chercherons à tirer de la solution générale celle du cas suivant.

Autre exemple du même usage des quantités connues faites négatives.

Deux Courriers sont à la distance de 50 lieues, l'un étant par exemple à Lille, l'autre à Paris. Le premier part de Lille à 8 heures du soir pour aller à Paris en faisant 4 lieues par heure. Le second part le même jour de Paris à 11 heures du matin pour aller à Lille, & fait 3 lieues par heure, on demande à quelle distance de Paris ils se rencontreront.

En comparant cet énoncé avec celui du Problême général, on voit d'abord que la lettre c qui exprimoit la marche du premier Courrier dans un tems donné doit être négative, puisque dans la solution générale, on supposoit que le premier Courrier s'éloignoit, & qu'il vient dans ce cas-ci au-devant du second. On voit ensuite que la lettre b qui exprimoit le nombre

d'heures d'avance du premier Courrier doit être auſſi négative, puiſqu'il eſt parti plus tard.

Ainſi on n'aura qu'à faire dans la formule générale $x = \frac{ade + bce}{de - cf}$, $a = 50$, $b = -9$ $c = -4$, $d = 1$, $e = 3$, $f = 1$, & l'on aura $x = \frac{50 \times 1 \times 3 - 9 \times -4 \times 3}{1 \times 3 + 4 \times 1} = \frac{150 + 108}{3 + 4}$ $= \frac{258}{7} = 36\frac{6}{7}$ qui apprend que lorſque le Courrier de Paris aura fait $36\frac{6}{7}$ lieues il aura joint celui de Lille.

LXVI.

Un des uſages des plus étendus de l'Algebre & qui montre le mieux l'avantage qu'on a de prendre à volonté, ainſi qu'on vient de faire, les ſignes des quantités données en général dans les Problêmes, c'eſt de rapporter à la ſolution des Equations qu'on a priſes généralement, toutes celles dans leſquelles les inconnues ſont diſpoſées de la même maniere, mais avec des ſignes & des coefficiens quelconques. Par exemple avec les deux Equations $bx + cy = a$ & $ex + fy = d$ qu'on a réſolues dans l'art. LVI. on réſoudra toujours deux Equations du premier dégré quelles qu'elles ſoient, pourvû qu'elles ne renferment que deux inconnues.

Deux Equations du premier dégré à deux inconnues, peuvent toujours être rapportées aux précédentes.

Qu'on ait, par exemple, à réſoudre les deux Equations $mnx = ppy - hhg$ & $mny = p^3 - nnx$. Pour les comparer aux premieres, on commencera par les écrire ainſi

Exemple.

$mnx - p^2y = -hhg$ & $nnx + nmy = p^3$ les comparant alors terme à terme avec les deux Equations

$bx + cy = a$ & $ex + fy = d$.

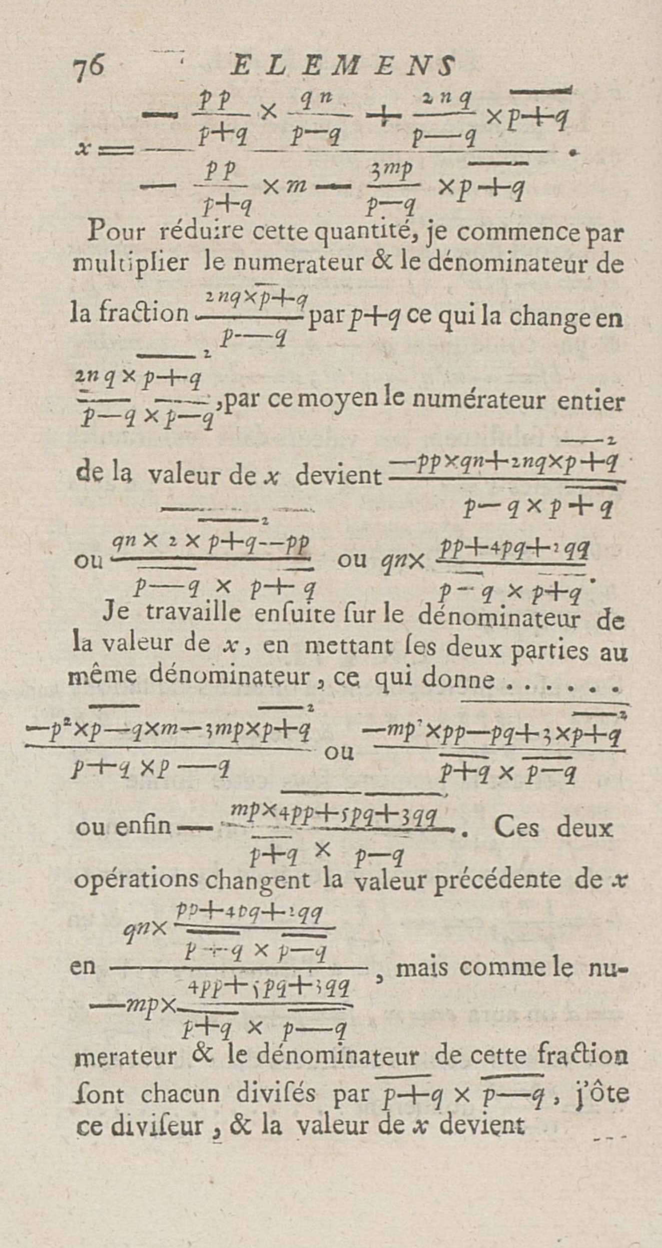
La premiere avec la premiere, & la ſeconde avec la ſeconde, on aura
$b = mn$, $c = -p^2$, $a = -hhg$, $e = n^2$, $f = mn$, $d = p^3$.

Ce qui donnera $cd = -p^5$, $af = -mnhhg$
$ce = -p^2n^2$, $bf = mmnn$, $ae = -h^2n^2g$,
$bd = mnp^3$,
& par conſéquent $cd - af = -p^5 + mnhhg$
$ce - bf = -m^2n^2 - p^2n^2$; $ae - bd = -h^2n^2g - mnp^3$.

Or ſubſtituant ces valeurs dans les formules générales $x = \frac{cd - af}{ce - bf}$ & $y = \frac{ae - bd}{ce - bf}$, on aura enfin $x = \frac{p^5 - mnh^2g}{m^2n^2 + p^2n^2}$ .... & $y = \frac{h^2gn^2 + mnp^3}{m^2n^2 + p^2n^2}$.

LXVII.

Suppoſons préſentement qu'on ait les Equations Autre exemple.
$\frac{3mpx}{p-q} = \frac{ppy}{p+q} - \frac{2nq}{p-q}$ & $mx + \overline{p+q} \times y = \frac{qn}{p-q}$
en mettant la premiere ſous cette forme
$\frac{3mpx}{p-q} - \frac{pp}{p+q}y = -\frac{2nq}{p-q}$ on aura en la comparant à l'Equation générale $bx + cy = a$,
$b = \frac{3mp}{p-q}$, $c = -\frac{pp}{p+q}$, $a = -\frac{2nq}{p-q}$, & en comparant la ſeconde à l'Equation $ex + fy = d$ on aura $e = m$, $f = p + q$, $d = \frac{qn}{p-q}$ & ces valeurs étant ſubſtituées dans la formule
$x = \frac{cd - af}{ce - bf}$ donneront ....



$$x = \frac{-\frac{pp}{p+q}\times\frac{qn}{p-q}+\frac{2nq}{p-q}\times\overline{p+q}}{-\frac{pp}{p+q}\times m-\frac{3mp}{p-q}\times\overline{p+q}}.$$

Pour réduire cette quantité, je commence par multiplier le numerateur & le dénominateur de la fraction $\frac{2nq\times\overline{p+q}}{p-q}$ par $p+q$ ce qui la change en $\frac{2nq\times\overline{p+q}^2}{\overline{p-q}\times\overline{p-q}}$, par ce moyen le numérateur entier de la valeur de x devient $\frac{-pp\times qn+2nq\times\overline{p+q}^2}{\overline{p-q\times p+q}}$ ou $\frac{qn\times 2\times\overline{p+q}^2--pp}{\overline{p-q}\times\overline{p+q}}$ ou $qn\times\frac{\overline{pp+4pq+2qq}}{\overline{p-q}\times\overline{p+q}}$.

Je travaille ensuite sur le dénominateur de la valeur de x, en mettant les deux parties au même dénominateur, ce qui donne . . . . . . $\frac{-p^2\times\overline{p-q}\times m-3mp\times\overline{p+q}^2}{p+q\times p-q}$ ou $\frac{-mp^2\times\overline{pp-pq+3\times\overline{p+q}^2}}{\overline{p+q}\times\overline{p-q}}$ ou enfin $-\frac{mp\times\overline{4pp+5pq+3qq}}{\overline{p+q}\times\overline{p-q}}$. Ces deux opérations changent la valeur précédente de x en $\frac{qn\times\frac{\overline{pp+4pq+2qq}}{\overline{p+q}\times\overline{p-q}}}{-mp\times\frac{\overline{4pp+5pq+3qq}}{\overline{p+q}\times\overline{p-q}}}$, mais comme le numerateur & le dénominateur de cette fraction sont chacun divisés par $\overline{p+q}\times\overline{p-q}$, j'ôte ce diviseur, & la valeur de x devient

$\frac{qn \times \overline{pp + 4pq + 2qq}}{-mp \times \overline{4pp + 5pq + 3qq}}$ ou $-\frac{qn \times \overline{pp + 4pq + 2qq}}{mp \times \overline{4pp + 5pq + 3qq}}$ ou $-\frac{qn}{mp} \times \frac{pp + 4pq + 2qq}{4pp + 5pq + 3qq}$ ou enfin ...... $x = \frac{-nqpp - 4pqqn - 2nq^3}{4mp^3 + 5mp^2q + 3mpqq}$ substituant maintenant les mêmes valeurs de a, b, c, &c. dans la formule générale .... $y = \frac{ae - bd}{ce - bf}$

on aura $y = \frac{-\frac{2nq}{p-q} \times m - \frac{3mp}{p-q} \times \frac{qn}{p-q}}{-\frac{pp}{p+q} \times m - \frac{3mp}{p-q} \times \overline{p+q}}$ au numérateur de laquelle je donne cette forme $\frac{-2mnq \times \overline{p-q} - 3mpqn}{\overline{p-q}^2}$, en multipliant le numerateur & le dénominateur de la fraction $-\frac{2nqm}{p-q}$ par $p-q$. Je réduis ensuite cette nouvelle forme, & elle devient $\frac{mnq \times \overline{-5p + 2q}}{\overline{p-q}^2}$

Quant au dénominateur de la valeur de y, comme il est le même que celui de la valeur de x, il se réduira de même, & l'on aura

partant $y = \frac{mnq \times \frac{2q - 5p}{\overline{p-q}^2}}{-mp \times \frac{\overline{4pp + 5pq + 3qq}}{\overline{p+q} \times \overline{p-q}}}$ ou en effaçant les diviseurs communs $p-q$ & en réduisant, $y = \frac{qn \times \frac{5p - 2q}{p - q}}{p \times \frac{4pp + 5pq + 3qq}{p + q}}$ qui en fai-

ſans paſſer le diviſeur $p + q$ en haut, & le diviſeur $p - q$ en bas ſuivant les regles des diviſions des fractions, devient enfin ....

$$y = \frac{qn \times \overline{p+q} \times \overline{5p-2q}}{p \times \overline{p-q} \times \overline{4p^2+5pq+3qq}}$$

$$\text{ou } y = \frac{-2qn + 5p^2qn + 3pq^2n}{-2p^2q^2+4p^4+p^3q-3pq^3}$$

LXVIII.

Autre maniere de réſoudre le même exemple.

Si pour réſoudre les Equations propoſées dans cet exemple, on avoit commencé par delivrer de fractions ces Equations le calcul qu'on auroit fait de la maniere ſuivante auroit donné moins d'embarras de la part des diviſeurs.

Soient multipliés d'abord les deux membres de l'Equation $\frac{3mpx}{p-q} = \frac{ppy}{p+q} - \frac{2qn}{p-q}$ ou $\frac{3mpx}{p-q} - \frac{ppy}{p+q} = - \frac{2nq}{p-q}$ par $pp - qq$ produit des deux diviſeurs $p-q$, $p+q$ & l'on aura l'Equation $\overline{3mpp + 3mpq} \times x + \overline{ppq - p^3} \times y = - 2npq - 2nqq$.

Soient multipliés de même les deux membres de l'Equation $mx + \overline{p+q} \times y = \frac{nq}{p-q}$ par $p - q$ & l'on aura $\overline{mp - mq} \times x + \overline{pp - qq} \times y = qn$

Comparant préſentement ces deux nouvelles Equations avec les deux formules générales on a $b = 3mpp + 3mpq$, $c = ppq - p^3$, $a = -2npq - 2nq^2$, $e = mp - mq$, $f = p^2 - q^2$, $d = qn$

D'où l'on tire $cd = p^2q^2n - p^3qn$, $af = -$

$2np^3q - 2np^2q^2 + 2pq^3n + 2nq^4$, $ae = 2nmq^3 - 2nmp^2q$, $bd = 3mnp^2q + 3mnpq^2$; $ce = 2p^3qm - mp^4 - mp^2q^2$; $bf = 3mp^3q + 3mp^4 - 3mpq^3 - 3mp^2q^2$

& partant $cd - af = qnp^3 + 3p^2q^2n - 2npq^3 - 2nq^4$

$ce - bf = 2mp^2q^2 - 4mp^4 - mp^3q + 3mpq^3$

$ae - bd = 2nmq^3 - 5mnp^2q - 3mnpq^2$ qui

donnent $x = \frac{qnp^3 + 3ppqqn - 2npq^3 - 2nq^4}{2mp^2q^2 - 4mp^4 - mp^3q + 3mpq^3}$

& $y = \frac{2nmq^3 - 5mnp^2q - 3mnpqq}{2mppqq - 4mp^4 - mp^3q + 3mpq^3}$

LXIX.

Comparaiſon des deux ſolutions précédentes.

Si on compare préſentement ces deux valeurs de x & de y avec celles qu'on avoit trouvées précédemment, on voit d'abord ſans aucune difficulté l'idendité des deux valeurs de y. Quant aux valeurs de x, pour ſçavoir comment la premiere peut être la même choſe que la ſeconde, il faut remarquer que l'égalité qui doit être entre ces deux expreſſions, ſuppoſe néceſſairement que le numérateur $qnp^3 + 3nppqq - 2npq^3 - 2nq^4$ de la ſeconde contienne le numérateur $-qnpp - 4pq^2n - 2q^3n$ de la premiere, de la même maniere que le dénominateur $2mp^2q^2 - 4mp^4 - mp^3q + 3mpq^3$ de la ſeconde contient le dénominateur $4p^3m + 5p^2qm + 3mpq^2$ de la premiere. Or en prenant la peine de diviſer le ſecond numérateur par le premier, on trouve en effet le même quotient $p - q$ qu'en diviſant le ſecond dénominateur par le premier. C'eſt-à-dire que l'expreſſion......

$\frac{qnp^3 + 3ppqqn - 2npq^3 - 2nq^4}{2mp^2q^2 - 4mp^4 - mp^3q + 3mpq^3}$ ſe change en $\frac{\overline{p-q} \times \overline{-nqpp - 4pqqn - 2nq^3}}{\overline{p-q} \times \overline{4mp^3 + 5mp^2q + 3mpq^2}}$ ou en $\frac{-nqpp - 4pqqn - 2nq^3}{4mp^3 + 5mp^2q + 3mpq^2}$ en ôtant les diviſeurs communs $p - q$.

LXX.

La maniere dont on vient de réduire la plus compoſée des deux valeurs de x à la plus ſimple étoit aiſée à imaginer lorſqu'on ſçavoit l'une & l'autre de ces deux expreſſions, mais ſi on n'eût connu que la plus compoſée & qu'on eût voulu la ſimplifier, on auroit été beaucoup plus embarraſſé, puiſqu'on n'auroit pas ſçû par quelle quantité il falloit diviſer le numérateur & le dénominateur de la fraction. Or, comme ce ſeroit un vice dans la ſolution d'un Problême qu'une valeur d'x réductible & non réduite, il faut chercher une méthode pour réduire toute fraction qui peut ſe réduire, ou ce qui revient au même, il faut chercher une méthode pour trouver quel eſt le plus grand diviſeur commun que puiſſent avoir deux quantités données.

Suppoſons d'abord, pour aller du plus ſimple au plus compoſé que ces deux quantités ne ſoient que des nombres ; que l'on ait, par exemple, à chercher le plus grand diviſeur commun des nombres 637 & 143 ou, ce qui revient au même, que l'on ſe propoſe de réduire la fraction $\frac{637}{143}$ à ſa plus ſimple expreſſion.

Diviſant

Divisant d'abord 637 par 143 il vient 4 pour quotient & 65 pour reste, c'est-à-dire, que la fraction $\frac{637}{143}$ se change en $4 + \frac{65}{143}$.., d'où la question est réduite à abbaisser la fraction $\frac{65}{143}$, ou ce qui revient au même, à chercher le nombre qui est le plus grand commun diviseur des nombres 143 & 65. Car lorsque ce nombre sera trouvé, il est évident qu'il sera aussi le plus grand commun diviseur des nombres 637 & 143, puisqu'on ne sçauroit réduire la fraction $\frac{65}{143}$ à sa plus simple expression, qu'on ne réduise en même-tems $4 + \frac{65}{143}$ ou $\frac{637}{143}$ à sa plus simple expression.

Les deux nombres 143 & 65 sur lesquels il s'agit d'opérer présentement étant plus simples que les deux premiers 637 & 143, je vois que la difficulté est diminuée, & qu'en s'y prenant de la même maniere on la diminuera encore. Au lieu de la fraction $\frac{65}{143}$ à réduire, j'écris $\frac{143}{65}$ non que je prétende que ces fractions soient les mêmes, mais parce qu'on ne sçauroit réduire l'une, que l'autre ne se réduise de la même maniere. Ensuite pour réduire $\frac{143}{65}$ je divise 143 par 65, ce qui me donne 2 pour quotient, & 13 pour reste. Il ne faut donc plus, par le même principe, que chercher le plus grand commun diviseur de 13 & de 65. Car on voit que le plus grand commun diviseur de ces deux nombres sera aussi celui de 143 & de 65, à cause que la fraction $\frac{143}{65}$ se change en $2 + \frac{13}{65}$.

Présentement le plus grand commun diviseur de 13 & de 65 est 13 lui-même, puisqu'il

divise exactement 65. Donc 13 est aussi le plus grand commun diviseur de 143 & de 65, donc il est aussi celui des nombres proposés 637, 143. En effet 637 est 49×13 & 143, 11×13, d'où l'on tire $\frac{637}{143} = \frac{49}{11}$ fraction irréductible.

LXXI.

On peut s'assurer facilement que la méthode qu'on vient de suivre dans l'exemple précédent peut s'appliquer à quelques nombres que ce soit. Qu'on ait en général deux nombres A & B, & que le quotient de la division du premier par le second soit a & le reste C, la question sera réduite à trouver le plus grand commun diviseur de B & de C; b étant supposé alors le quotient de B par C, & D le reste, il ne s'agira plus que de trouver le plus grand commun diviseur de C & de D, c'est-à-dire, de diviser C par D, & de se servir du reste pour diviser D. Allant ainsi de division en division jusqu'à ce qu'on arrive à deux nombres dont le plus petit soit contenu exactement dans le plus grand, ce nombre contenu exactement sera le plus grand diviseur commun des deux premiers nombres A & B.

Méthode générale de trouver le plus grand commun diviseur de deux nombres.

Cette regle dans toute sa généralité, comme dans l'exemple précédent, est fondée sur ce que la fraction $\frac{A}{B}$ devenant $a + \frac{C}{B}$ ne sçauroit s'abbaisser que lorsque $\frac{C}{B}$ s'abbaisse, que $\frac{C}{B}$ ne sçauroit se réduire que de la même maniere que $\frac{B}{C}$, & que $\frac{B}{C}$ étant $b + \frac{D}{C}$ ne sçauroit se réduire sans que $\frac{D}{C}$ se réduise & ainsi de suite.

LXXII.

Voyons présentement quels sont les changemens qu'il faut faire à cette méthode pour l'appliquer aux quantités Algebriques, & pour plus de clarté prenons d'abord un exemple.

Supposons qu'il s'agisse de trouver le plus grand commun diviseur des quantités $3a^3 - 3baa + bba - b^3$ & $4aa - 5ba + bb$. Il faudroit, suivant la méthode précédente, diviser la premiere de ces deux quantités par la seconde; mais comme la division ne sçauroit se faire à cause que le premier terme $3a^3$ du dividende ne contient pas exactement le premier terme du diviseur, je multiplie toute la premiere quantité par 4, & je remarque que 4 n'étant point un des diviseurs de la seconde quantité $4aa - 5ba + bb$, il ne peut pas y avoir d'autre plus grand commun diviseur entre $12a^3 - 12baa + 4bba - 4b^3$ & $4aa - 5ba + bb$ qu'entre $3a^3 - 3baa + bba - b^3$ & $4aa - 5ba + bb$.

Je divise alors suivant les regles précédentes $12a^3 - 12ba^2 + 4b^2a - 4b^3$ par $4a^2 - 5ba + bb$; j'ai pour quotient $3a$, & pour reste $3baa + bba - 4b^3$, ce qui, suivant les mêmes regles, demanderoit qu'on divisât $4a^2 - 5ba + bb$ par $3baa + bba - 4b^3$, mais comme la division de ces quantités ne sçauroit se faire sans les préparer auparavant, je remarque d'abord que b étant commun à tous les termes de la derniere quantité & ne l'étant pas à ceux de la seconde, il ne sçauroit être partie du plus grand commun diviseur de ces quan-

tités, ainſi je l'ôte de tous les termes de cette ſeconde quantité, & je prends à ſa place $3aa + ba - 4b^2$. Je remarque enſuite qu'en multipliant la premiere quantité $4aa - 5ba + bb$ par 3 qui n'eſt point un diviſeur de $3aa + ba - 4b^2$ la diviſion ſera poſſible; je fais donc cette diviſion de $12aa - 15ab + 3bb$ par $3aa + ba - 4bb$, ce qui me donne 4 pour quotient & pour reſte $- 19ab + 19bb$.

Il n'eſt donc plus queſtion préſentement que de trouver le plus grand commun diviſeur de $3aa + ba - 4bb$, & de $- 19ab + 19bb$. Comme il faudroit, pour cette opération, diviſer la premiere de ces deux quantités par la ſeconde, & que pour pouvoir diviſer les deux premiers termes de ces quantités, il faudroit multiplier la premiere par $19b$ qui eſt un diviſeur exact de la ſeconde, j'ôte ce diviſeur de la ſeconde, ce qui la réduit à $- a + b$.

Mais le plus grand commun diviſeur de $3aa + ba - 4bb$ & de $-a + b$, eſt $-a + b$ lui-même, puiſque la diviſion de ces deux quantités ſe fait exactement. Donc $- a + b$ eſt le plus grand commun diviſeur de $3aa + ba - 4bb$ & de $- 19ab + 19bb$; Donc il eſt auſſi le plus grand commun diviſeur de $12aa - 15ab + 3bb$ & de $3aa + ba - 4bb$, donc il l'eſt encore de $4aa - 5ba + bb$, & de $3baa + bba - 4b^3$, auſſi-bien que de $12a^3 - 12baa + 4bba - 4b^3$ & de $4aa - 5ba + bb$. Donc il eſt enfin le plus grand diviſeur commun des quantités propoſées $3a^3 - 3baa + bba - b^3$ & $4aa - 5ba + bb$.

LXXIII.

Il n'eſt pas difficile maintenant de voir qu'on réuſſiroit à peu près de la même maniere quelles que fuſſent les quantités dont on voulut trouver les plus grands communs diviſeurs. Le ſeul principe qu'on ſoit obligé d'ajouter dans cette recherche à la méthode de l'Article LXXI. c'eſt que deux quantités quelconques *A* & *B* conſerveront leur plus grand commun diviſeur, ſi on multiplie ou diviſe l'une de ces deux quantités, *A* par exemple, par une quantité qui n'ait aucun diviſeur commun avec *B*.

Méthode générale pour trouver le plus grand commun diviſeur des quantités algebriques.

On peut énoncer ainſi le procédé de la méthode générale de déterminer les plus grands communs diviſeurs. Soient *A* & *B* les deux quantités propoſées, on commencera par ordonner ces deux quantités par rapport à une des lettres quelconques qu'elles ont de commun. On verra enſuite par quelle quantité *m* il faudroit multiplier *A* pour que les termes affectés de la plus haute puiſſance de la lettre ſuivant laquelle on l'a ordonnée puiſſent ſe diviſer par les termes de *B* affectés de la plus haute puiſſance de la même lettre; ſi ce multiplicateur *m* n'a aucun commun diviſeur avec *B*, on s'en ſervira pour multiplier *A*, mais s'il a un commun diviſeur *n* on ôtera ce commun diviſeur tant de *m* que de *B*, & on ne multipliera *A* que par $\frac{m}{n}$, ce qui formera une nouvelle quantité *C* que l'on prendra à la place de *A*. On prendra de même à la place de *B* la quantité *D* qui en vient lorſqu'on l'a diviſé

par le diviſeur n qu'il a de commun avec m.

Cela fait, on diviſera C par D, & la diviſion faite, ſi elle eſt exacte, D ſera le plus grand commun diviſeur cherché de A & de B; mais s'il y a un reſte E, on fera à l'égard de D & de E la même opération qu'à l'égard de A & de B, & ainſi de ſuite juſqu'à ce qu'on arrive à deux quantités qui ſe diviſent exactement. Lorſqu'on y ſera parvenu, celle de ces deux quantités qui ſera contenue exactement dans l'autre, ſera le plus grand commun diviſeur cherché.

Il eſt bon de faire remarquer que ſi avant d'entreprendre l'opération dont on vient de voir la méthode, on apperçoit dans l'une des quantités propoſées A ou B quelque quantité qui en ſoit un diviſeur exact & qui ne le ſoit point de l'autre, il faudra commencer par ôter ce diviſeur pour que le calcul ſoit plus ſimple.

Afin que les Commençans puiſſent acquérir quelque facilité dans l'application de cette méthode, j'ai joint les exemples ſuivans.

LXXIV.

Premier Exemple.

Soient les quantités $qnp^3 + 3np^2q^2 - 2npq^3 - 2nq^4$ & $2mp^2q^2 - 4mp^4 - mp^3q + 3mpq^3$ dans leſquelles nous n'avons trouvé (art. LXIX.) le diviſeur commun $p - q$, que parce que nous ſçavions d'avance que la premiere de ces deux quantités diviſée par la ſeconde devoit donner le même quotient que la quantité $-nqp^2 - 4pq^2n - 2nq^3$ diviſée par $4mp^3 + 5mp^2q + 3mpq^2$.

Pour réduire présentement ces deux quantités, sans employer autre chose que la méthode précédente, on commencera par ôter qn qui est commun à tous les termes de la premiere de ces deux quantités, & qui n'est point contenu dans la seconde; on ôtera de même pm qui est commun à tous les termes de la seconde sans être contenu dans la premiere; & par-là l'opération sera réduite à trouver le plus grand diviseur commun des quantités (A) $-4p^3-p^2q+2pq^2+3q^3$ & (B) $p^3+3ppq-2pq^2-2q^3$.

Divisant A par B, j'ai -4 pour quotient & pour reste (C) $11p^2q-6pq^2-5q^3$, comme il faudroit alors multiplier B par $11q$ pour que son premier terme pût être divisé par le premier terme de C, & que q est contenu dans tous les termes de C, je multiplie simplement B par 11, & je divise C par q, d'où je n'ai plus à comparer que les deux quantités (D) $11p^3+33p^2q-22pq^2-22q^3$, & ($E$) $11p^2-6pq-5q^2$.

Je divise la premiere par la seconde, & j'ai pour quotient p & pour reste (F) $39p^2q-17pq^2-22q^3$. Comme il faudroit alors multiplier (E) par $39q$ afin que son premier terme fut divisible par celui de cette nouvelle quantité F, & que q est commun à tous les termes de F, je ne multiplie donc E que par 39 & je divise son produit (G) $429p^2-234pq-195q^2$ par (H) $39p^2-17pq-22q^2$. Le quotient est 11 & le reste (I) $-47pq+47q^2$.

Pour diviser alors H par I il faudroit mul-

tiplier tous ſes termes par $47q$; mais cette quantité eſt un diviſeur de H, je l'ôte donc de H & il me reſte $q-p$ pour ſervir de diviſeur à $39p^2-17pq-22q^2$. Or la diviſion ſe fait exactement, donc $q-p$ eſt le plus grand diviſeur commun cherché des quantités propoſées.

LXXV.

Second exemple.

Soient propoſées préſentement les deux quantités $ab+2aa-3bb-4bc-ac-cc$ & $9ac+2aa-5ab+4cc+8bc-12bb$, ordonnant ces deux quantités par rapport à a j'ai $2aa+ba-ca-3bb-4bc-cc$ & $2aa+9ca-5ba-12bb+8bc+4cc$, ou $(A)\ 2aa+\overline{b-c}\times a-3bb-4bc-cc$ & $(B)\ 2aa+\overline{9c-5b}\times a-12bb+8bc+4cc$.

Diviſant la premiere par la ſeconde, j'ai 1 pour quotient & pour reſte $(C)\ \overline{6b-10c}\times a+9bb-12bc-5cc$. Pour diviſer B par cette quantité, je vois qu'il faudroit auparavant la multiplier par $3b-5c$. Mais avant d'en faire l'opération, je tente la diviſion de C par $3b-5c$, elle réuſſit, & donne pour quotient $(D)\ 2a+3b+c$; je n'ai donc plus qu'à chercher le plus grand commun diviſeur de B & de D; mais B eſt diviſible exactement par D, donc D ou $2a+3b+c$ eſt le plus grand commun diviſeur cherché de $ab+2aa-3bb-4bc-ac-cc$ & de $9ac+2aa-5ab+4cc+8bc-12bb$. En effet la premiere de ces deux quantités eſt le produit de $2a+3b+c$ par $a-b-c$, la ſeconde le produit de

$2a + 3b + c$ par $a - 4b + 4c$, & ces deux quantités $a - b - c$ & $a - 4b + 4c$ n'ont plus aucun commun diviſeur.

LXXVI.

Troiſiéme Exemple.

Soient les deux quantités $(A)\ \overline{dd - cc} \times a^2 + c^4 - ddcc$ & $(B)\ 4da^2 - \overline{2cc + 4cd} \times a + 2c^3$ ordonnées par rapport à a. Je change d'abord B en $(C)\ 2da^2 - \overline{cc + 2cd} \times a + c^3$ en ôtant de tous ſes termes le diviſeur 2 qui n'eſt pas commun avec A. Je multiplie enſuite A par $2d$ afin de rendre la diviſion poſſible, ce qui me donne pour quotient $dd - cc$ & pour reſte $(D)\ \overline{dd - cc} \times \overline{cc + 2cd} \times a - \overline{dd - cc} \times c^3 + 2dc^4 - 2d^3cc$, ſi on vouloit alors que cette quantité ſervit de diviſeur à C, il faudroit multiplier auparavant C par $\overline{dd - cc} \times \overline{cc + 2cd}$ afin que ſon premier terme permit la diviſion.

Mais avant de faire cette multiplication, il faut ſçavoir ſi $\overline{dd - cc} \times \overline{cc + 2cd}$, ne ſeroit point ou un diviſeur ou un multiple de quelque diviſeur de D. Pour le ſçavoir, je cherche le plus grand commun diviſeur de $\overline{dd - cc} \times \overline{cc + 2cd}$ & de $-\overline{dd - cc} \times c^3 + 2dc^4 - 2d^3cc$, c'eſt-à-dire de $ddcc - c^4 + 2cd^3 - 2c^3d$ & de $-ddc^3 + c^5 + 2dc^4 - 2d^3cc$; mais je vois tout de ſuite que la ſeconde de ces quantités n'eſt autre choſe que le produit de la premiere par $-c$, & partant que la quantité D ſe réduit au produit de $\overline{dd - cc} \times \overline{cc + 2dc}$ par $a - c$, donc au lieu de multiplier C par $\overline{dd - cc} \times \overline{cc + 2dc}$, je diviſe

D par cette quantité & il vient (E) $\overline{a-c}$ dont il faut chercher le plus grand commun diviſeur avec C; or $a-c$ diviſe exactement C, donc $a-c$ eſt le plus grand diviſeur cherché.

LXXVII.

Autre maniere de réſoudre le même exemple.

Au reſte avec un peu d'habitude dans le calcul, on découvre ſouvent le plus grand commun diviſeur de deux quantités plus facilement que par la méthode générale qu'on vient d'expliquer. Par exemple les deux quantités précédentes $\overline{dd-cc}\times aa+c^4-ddcc$ & $4daa-2cc+4cd\times a+2c^3$ étant ordonnées par rapport à d, & par conſequent étant ſous cette forme $\overline{aa-cc}\times dd+c^4-aacc$ & $\overline{4aa-4ca}\times d+2c^3-2c^2a$, il eſt aiſé de découvrir que $aa-cc$ eſt un diviſeur de la premiere, & $c-a$ un diviſeur de la ſeconde. Mais $aa-cc$ eſt diviſible par $c-a$, donc $c-a$ eſt un diviſeur des deux quantités propoſées, je les diviſe donc l'une & l'autre par $c-a$, & j'ai pour leurs quotients $\overline{cc-dd}\times c+a$; & $4ad+2cc$ qu'on voit aſſez facilement n'avoir plus de commun diviſeur, donc $c-a$ ou $a-c$ étoit le plus grand commun diviſeur des quantités propoſées.

LXXVIII.

Autres quantités dont on trouve le plus grand commun diviſeur ſans la

Qu'on ſe propoſe maintenant de chercher le plus grand commun diviſeur des deux quantités $6a^5+15a^4b-4a^3cc-10aabcc$ & $9a^3b-27aabc-6abcc+18bc^3$,

je commence par ôter aa de tous les termes de la premiere; & $3b$ de tous ceux de la seconde. J'ai alors $6a^3 + 15a^2b - 4acc - 10bcc$ & $3a^3 - 9aac - 2acc + 6c^3$; mais comme la ſeconde de ces deux quantités ne contient aucun b, je conclus que ſi elle a un commun diviſeur avec la premiere, il faut qu'elle l'ait ſéparement avec ſes deux parties $6a^3 - 4acc$ & $15a^2b - 10bcc$, & que ces deux parties doivent auſſi avoir entr'elles le même commun diviſeur. Or on voit tout de ſuite que $3aa - 2cc$ eſt le diviſeur commun de ces deux parties, donc il eſt le plus grand commun diviſeur des quantités propoſées ſi elles en ont un. Le prenant donc pour diviſer ces deux quantités on voit qu'en effet il les diviſe & qu'il eſt par conſequent leur plus grand commun diviſeur.

méthode précédente.

LXXIX.

On a vû ſuffiſamment par ce qui précede que pour trouver les deux inconnues que renferme un Problême, il faut avoir deux Equations, il n'eſt pas difficile d'imaginer en partant de-là que lorſqu'il y aura trois inconnues dans un Problême, il faudra trois Equations & ainſi de ſuite. Quant à la maniere de dégager les inconnues de ces Equations, elle ne ſera pas difficile non plus à imaginer après ce qu'on en a vû pour celles qui ne renferment que deux inconnues. Car qu'on ait trois Equations contenant chacune les trois inconnues x, y, z; ſi on tire la valeur de x de chacune de ces Equa-

Lorſqu'il y a trois inconnues dans un Problême, il faut trois Equations pour le réſoudre.

Comment on dégage les inconnues de ces Equations.

tions exprimée par le moyen des connues & des deux autres inconnues y, z, de ces Equations, il eſt évident qu'en égalant les unes aux autres ces différentes valeurs de x, on aura deux nouvelles Equations qui ne contiendront plus que les deux inconnues y & z, & qui ſeront par conſequent dans le cas de celles dont nous venons de parler. Il en ſeroit de même des Equations à quatre, cinq &c. inconnues.

Comme la méthode générale qu'on vient d'expliquer peut renfermer des difficultés dans l'exécution, nous allons en montrer l'application dans le Problême ſuivant qui renfermera la plus grande complication que peuvent avoir les Equations du premier dégré à trois inconnues.

LXXX.

Problême dans lequel on employe trois inconnues.

On ſçait ce que trois magaſins contenant chacun trois ſortes de denrées, on couté les uns & les autres ſéparement; on ſçait de plus le nombre de meſures que chaque magaſin contient de ces trois différentes denrées; on demande à combien revient une meſure de chaque denrée.

Soient a, b, c, les nombres de meſures de chaque denrée contenue dans le premier magaſin, & ſoit d le prix de ce magaſin.

Soient de plus e, f, g, les meſures des mêmes denrées contenues dans le ſecond magaſin dont le prix eſt ſuppoſé h.

Soient encore i, k, l les meſures des mêmes denrées contenues dans le troiſiéme magaſin dont le prix eſt ſuppoſé m.

Soient enfin x, y, z ce que coute une mesure de chaque denrée.

Il eſt évident que la quantité de la premiere denrée contenue dans le magaſin d coutera ax, puiſque a eſt le nombre des meſures de cette denrée & x le prix de la meſure de cette denrée. De même la quantité de la ſeconde denrée contenue dans le même magaſin coutera by, & la quantité de la troiſiéme denrée contenue dans le même magaſin coutera cz. Ajoutant donc ces trois ſommes pour les égaler au prix d de ce magaſin, on aura l'Equation

$$ax + by + cz = d,$$

on formera de même les Equations,

$$ex + fy + gz = h, \quad ix + ky + lz = m.$$

en exprimant les conditions mentionnées pour les deux autres magaſins.

Il eſt queſtion maintenant de tirer de ces Equations les valeurs de x, y, z. Dans cette vûe on tirera d'abord la valeur de x de la premiere Equation qui ſera $\frac{d - by - cz}{a}$, & égalant cette valeur de x à celle qu'on tire de la ſeconde Equation, on aura l'Equation

$$\frac{d - by - cz}{a} = \frac{h - fy - gz}{e}.$$

Egalant enſuite la même valeur $\frac{d - by - cz}{a}$ à celle qu'on tire de la troiſiéme Equation, on aura l'Equation $\frac{d - by - cz}{a} = \frac{m - ky - lz}{i}$.

De la premiere de ces deux Equations entre y & z, on tirera $de - bey - cez = ah - afy - agz$ ou $z = \frac{de - ah + afy - bey}{ce - ag}$

De la ſeconde on tirera $di - biy - icz = am - aky - alz$

ou $z = \frac{di - am + aky - biy}{ci - al}$.

En égalant ces deux valeurs de z il eſt clair qu'on auroit une Equation où il n'entreroit plus d'autre inconnue que y, & qu'en réſolvant cette Equation on connoîtroit y. Comme les calculs que l'on auroit par cette opération ſeroient aſſez conſidérables, je vais faire voir la maniere de les éviter en employant quelques abbreviations que les premiers Analyſtes qui ont eu de grands calculs à faire ont aiſément imaginées.

LXXXI.

Ces abbreviations conſiſtent à mettre de nouvelles lettres à la place de pluſieurs termes compoſés de connues.

Maniere d'abreger les Calculs par des dénominations particulieres.

Au lieu de... $de - ah$ je mettrai ...... α

Au lieu de... $af - be$............... β

Au lieu de... $ce - ag$............... γ

Au lieu de... $di - am$............... δ

Au lieu de... $ak - bi$............... ε

Au lieu de... $ci - al$............... φ

Par ces nouvelles dénominations les Equa-

tions précédentes deviendront $z = \frac{\alpha + \beta y}{\gamma}$ & $z = \frac{\delta + \varepsilon y}{\phi}$ lesquelles donneront $\alpha\phi + \beta\phi y = \delta\gamma + \gamma\varepsilon y$ d'où l'on tire . . . .

$y = \frac{\alpha\phi - \delta\gamma}{\gamma\varepsilon - \beta\phi}$ substituant ensuite cette valeur de y dans l'une des deux valeurs précédentes de z, dans la premiere par exemple, on aura

$$z = \frac{\alpha + \frac{\beta\alpha\phi - \beta\gamma\delta}{\gamma\varepsilon - \beta\phi}}{\gamma}$$

qui se réduit à $z = \frac{\alpha\varepsilon - \beta\delta}{\gamma\varepsilon - \beta\phi}$

Cela fait, on mettra ces valeurs de y & de z dans l'une des valeurs précédentes de x, dans $\frac{d - cz - by}{a}$ par exemple, & l'on aura

$$x = \frac{d}{a} - \frac{c}{a} \times \frac{\overline{\alpha\varepsilon - \beta\delta}}{\gamma\varepsilon - \beta\phi} - \frac{b}{a} \times \frac{\overline{\alpha\phi - \delta\gamma}}{\gamma\varepsilon - \beta\phi}$$

$$\text{ou } x = \frac{d \times \overline{\gamma\varepsilon - \beta\phi} - c \times \overline{\alpha\varepsilon - \beta\delta} - b \times \overline{\alpha\phi - \delta\gamma}}{a \times \overline{\gamma\varepsilon - \beta\phi}}$$

LXXXII.

Pour montrer présentement l'application de cette méthode, supposons que le premier magasin contienne 30 mesures de seigle, 20 d'orge & 10 de froment, & qu'il ait couté 230 ₶. *Exemple du Problême précédent en nombres.*

Que le second magasin contienne 15 mesures de seigle, 6 d'orge & 12 de froment & qu'il ait couté 138 ₶.

Que le troisiéme magasin contienne 10 mesures de seigle, 5 d'orge, 4 de froment & qu'il ait couté 75 ₶. Pour sçavoir à combien revient la mesure de seigle, celle d'orge & celle de froment, il faudra faire

$a = 30$, $b = 20$, $c = 10$, $d = 230$
$e = 15$, $f = 6$, $g = 12$, $h = 138$,
$i = 10$, $k = 5$, $l = 4$, $m = 75$, ce qui donnera $de - ah = \alpha = -690$, $af - be = \beta = -120$
$ce - ag = \gamma = -210$, $di - am = \delta = 50$
$ak - bi = \varepsilon = -50$, $ci - al = \varphi = -20$
substituant ensuite ces valeurs dans les quantités $\alpha\varphi - \gamma\delta$, $\gamma\varepsilon - \beta\varphi$, $\alpha\varepsilon - \beta\delta$ on aura 24300, 8100, 40500 pour ces trois quantités, ce qui donnera par consequent

$$y = \frac{24300}{8100} = 3, \quad z = \frac{40500}{8100} = 5$$

$$\& \; x = \frac{230 \times 8100 - 10 \times 40500 - 20 \times 24300}{30 \times 8100} = 4$$

Ainsi le prix de la mesure de seigle est de 4 ₶.
Celui de la mesure d'orge de . . . . 3 ₶.
Et celui de la mesure de froment de . . . 5 ₶.

LXXXIII.

Tous les Problêmes du premier dégré à trois inconnues, peuvent, étant mis en Equations, être compris dans le Problême précédent.

Comme les Equations du Problême précédent sont les plus générales du premier dégré à trois inconnues, puisque chacune contient les trois inconnues combinées avec des connues quelconques, il s'ensuit que tout Problême du premier dégré à trois inconnues sera renfermé dans le précédent aussi-tôt qu'il sera exprimé analytiquement. Pour en donner un exemple soit proposé le Problême suivant. On

On a trois lingots compoſés de différens métaux fondus enſemble,

La livre du premier contient ....

	onces		onces		onces	
....	7	d'arg.	3	de cuiv.	6	d'étain,
celle du 2^d	12		3		1,	
celle du 3eme	4		7		5.	

On demande ce qu'il faut prendre de chacun de ces lingots pour en former un quatriéme qui contienne

onces		onces	gros		onces	gros	
8	d'arg.	3	6	cuiv.	4	2	étain

Soient x, y, z les nombres d'onces qu'il faut prendre de chacun de ces métaux.

Il eſt évident que $\frac{7}{16}x$ ſera ce qu'il y aura d'argent dans ce qu'on tirera du premier lingot

que $\frac{12}{16}y$ ſera ce qu'il y en aura dans le morceau tiré du ſecond lingot

& que $\frac{4}{16}z$ ſera ce qu'il y en aura dans le morceau tiré du troiſiéme.

Ajoutant donc ces trois quantités leur ſomme devra être 8 onces d'argent, donc on a l'Equation $\frac{7}{16}x + \frac{12}{16}y + \frac{4}{16}z = 8$ ou $7x + 12y + 4z = 128$.

On aura de même pour ce qu'on tirera de cuivre des trois métaux, $\frac{3}{16}x$, $\frac{3}{16}y$ & $\frac{7}{16}z$ dont la ſomme doit faire 3 onces 6 gros ou $\frac{15}{4}$ onces ce qui donnera $\frac{3}{16}x + \frac{3}{16}y + \frac{7}{16}z = \frac{15}{4}$ ou $3x + 3y + 7z = 60$.

Ce qu'on tirera d'étain des trois métaux ſera pareillement $\frac{6}{16}x$, $\frac{1}{16}y$, $\frac{5}{16}z$ dont la ſomme doit faire 4 onces 2 gros ou $4\frac{1}{4}$ onces donc

$\frac{6}{16}x + \frac{1}{16}y + \frac{5}{16}z = 4 + \frac{1}{4}$
ou $6x + y + 5z = 68$.

Il ne s'agit donc plus que de résoudre ces trois Equations, c'est ce que l'on tirera facilement de la solution précédente en faisant

$a = 7 \quad b = 12 \quad c = 4 \quad d = 128,$
$e = 3 \quad f = 3 \quad g = 7 \quad h = 60,$
$i = 6 \quad k = 1 \quad l = 5 \quad m = 68,$

par lesquelles on trouvera

$de - ha = \alpha = -36$; $af - be = \beta = -15$; $ce - ag = \gamma = -37$,
$di - am = \delta = 292$, $ak - bi = \varepsilon = -65$;
$ci - al = \varphi = -11$,

substituant ensuite ces valeurs dans les quantités $\alpha\varphi - \gamma\delta$, $\gamma\varepsilon - \beta\varphi$, $\alpha\varepsilon - \beta\delta$ on aura 11200, 2240, 6720 pour ces trois quantités, ce qui donnera par conséquent

$$y = \frac{11200}{2240} = 5, \quad z = \frac{6720}{2240} = 3 \quad \&$$

$$x = \frac{128 \times 2240 - 4 \times 6720 - 12 \times 11200}{7 \times 2240} = 8,$$

c'est-à-dire qu'il faut prendre 5 onces du premier lingot, 3 onces du second & 8 du troisiéme pour former le lingot demandé.



ELEMENS D'ALGEBRE.

SECONDE PARTIE.

De la réfolution des Equations du fecond dégré.

NOus avons préfentement affez traité des Problêmes du premier dégré pour paffer à ceux des autres dégrés, & particulierement aux Problêmes du fecond dégré que nous allons examiner dans cette feconde Partie. Quant à la maniere d'exprimer analytiquement leurs conditions, elle eft la même que dans les Problêmes du premier dégré, ce n'eft que pour réfoudre les Equations aufquelles on arrive en exprimant les Problêmes qu'il faut employer des méthodes differentes fuivant les dégrés de ces Equations. On en peut voir un exemple dans le Problême fuivant, qui dans fa généralité renferme des Problêmes de tous les dégrés, & n'eft pas plus

difficile à exprimer analytiquement pour le dégré le plus composé, que pour le plus simple.

I

Problême qui contient dans sa généralité des Problêmes de tous les dégrés.

Un homme ayant placé une somme a *dans un commerce où il perd, veut se retirer dès la premiere année; mais en ayant manqué l'occasion & ne l'ayant pû retrouver qu'à la deuxiéme ou à la troisiéme, ou en général à la* n^eme^ *année, il trouve que la somme est diminuée de la quantité* b *de ce qu'elle étoit après la premiere année. On demande à combien pour cent montoit sa perte par an.*

Soit x le nombre cherché, c'est-à-dire ce que chaque cent livres perd après la premiere année. En faisant cette proportion $100 : 100 - x = a : a \times \frac{\overline{100 - x}}{100}$, le quatriéme terme $a \times \frac{\overline{100 - x}}{100}$ ou $a \times \overline{1 - \frac{x}{100}}$ exprimera ce que devient la somme a après la premiere année.

Si on continue ensuite cette proportion en disant

$$100 : 100 - x = \frac{a \times \overline{100 - x}}{100} : \frac{a \times \overline{100 - x}^2}{10000}:$$

le quatriéme terme $\frac{a \times \overline{100 - x}^2}{10000}$ ou $a \times \overline{1 - \frac{x}{100}}^2$ sera ce que devient la même somme a après la seconde année.

On exprimera de même ce que cette somme devient après la troisiéme année par

$a \times \overline{1 - \frac{x}{100}}^3$, & en général ce qu'elle devient après la n[eme] année sera $a \times \overline{1 - \frac{x}{100}}^n$, c'est-à-dire a multiplié par la quantité $1 - \frac{x}{100}$ élevée à la puiſſance n.

II.

Préſentement ſi on veut ſçavoir quelle ſera l'Equation à réſoudre, en ſuppoſant que le négociant ſe ſoit retiré à la ſeconde année, il faudra égaler la quantité $a \times \overline{1 - \frac{x}{100}}^2$ à la quantité $a \times \overline{1 - \frac{x}{100}}$ diminuée de la quantité b, ce qui donnera $a \times \overline{1 - \frac{x}{100}}^2 = a \times \overline{1 - \frac{x}{100}} - b$, ou en multipliant $1 - \frac{x}{100}$ par lui-même, ainſi que l'indique l'Expoſant 2, $a \times \overline{1 - \frac{2x}{100} + \frac{xx}{10000}} = a \times \overline{1 - \frac{x}{000}} - b$ qui ſe réduit à $x - 100x = -10000\frac{b}{a}$ Equation du ſecond dégré à laquelle les méthodes précédentes ne ſçauroient atteindre.

Equation du Problêm précédent pour le cas du ſecond dégré.

III.

Si on ſuppoſe que ce ne ſoit qu'à la troiſiéme année, l'Equation à réſoudre ſera $a \times \overline{1 - \frac{x}{100}}^3 = a \times \overline{1 - \frac{x}{100}} - b$ qui, en multipliant $1 - \frac{x}{100}$ deux fois par lui-même, ainſi

que l'indique l'Expoſant 3, devient

Pour le troiſiéme dégré. $a \times \overline{1 - \frac{3x}{100} + \frac{3x^2}{10000} - \frac{x^3}{1000000}} = a \times \overline{1 - \frac{x}{100}} - b$

ou enfin

$$x^3 - 300\,x^2 + 20000x = -1000000\frac{b}{a}$$

Equation qui doit naturellement promettre plus de difficulté que la précédente.

IV.

Quant aux autres cas on voit aiſément comment on parviendroit ſucceſſivement à former les Equations qu'ils donneroient, l'induction montre que l'Equation ſeroit toujours du dégré exprimé par le nombre n; ſi on veut avoir cette Equation en général ſans ſpécifier le nombre n; on n'aura qu'à employer l'expreſ-

Pour le dégré n. ſion générale $a \times \overline{1 - \frac{x}{100}}^{\,n}$ de la quantité que devient a après la n^{eme} année & l'Equation ſera

$$a \times \overline{1 - \frac{x}{100}}^{\,n} = a \times \overline{1 - \frac{x}{100}} - b \text{ ou} \ldots\ldots$$

$$\overline{1 - \frac{x}{100}}^{\,n} = 1 - \frac{x}{100} - \frac{b}{a}.$$

V.

Contentons nous préſentement de réſoudre le Problême dans le cas où ſon Equation eſt du ſecond dégré, c'eſt-à-dire lorſqu'elle eſt $x^2 - 100x = -10000\frac{b}{a}$, ou plûtôt cherchons une méthode pour réſoudre généralement toutes les Equations du ſecond dégré. Ceux qui voudront réſoudre des cas plus élevés du même Problême, y parviendront facile-

Maniere d'arriver à la ſolution générale des Equations du ſecond dégré.

ment auſſi-tôt qu'ils auront vû dans la ſuite, les méthodes générales qui conviennent aux dégrés que ces Equations donnent.

Ce qui ſe préſente le plus naturellement en cherchant une méthode pour réſoudre généralement les Equations du ſecond dégré, c'eſt de voir la liaiſon qu'il peut y avoir entre ces Equations & celles du premier; or il eſt clair que toute Equation du premier dégré deviendra du ſecond, ſi on en quarre les deux membres, par exemple $x + a = b$ donne étant quarrée $x^2 + 2ax + a^2 = b^2$; reſte donc à ſçavoir ſi, par une opération contraire, on pourroit rappeller toute Equation du ſecond dégré à une du premier. Prenons, par exemple l'Equation $x^2 + px = q$ qui exprimera toute Equation du ſecond dégré ſelon les valeurs qu'auront p & q, ces lettres pouvant déſigner toutes ſortes de quantités poſitives ou négatives. Suivant ce que nous venons de dire il n'y a qu'à voir ſi $x^2 + px$ ne ſeroit pas le quarré de quelque quantité dont la premiere partie ſeroit x, & dont la ſeconde ſeroit une connue, afin de trouver par ce moyen l'Equation du premier dégré, qui, étant quarrée ſeroit devenue $x^2 + px = q$. Or on voit facilement que $x^2 + px$ n'eſt pas un quarré, mais on voit en même-tems qu'il peut le devenir par quelque addition, & l'on a, comme on ſçait, la liberté de faire cette addition, pourvû qu'on ajoute la même quantité de l'autre côté de l'Equation.

Afin de trouver ce qui manque à $x^2 + px$ pour en faire un quarré, il n'y a autre choſe

à faire qu'à comparer cette quantité avec le quarré $xx + 2ax + aa$; le terme px répondant à $2ax$; p répondra à $2a$ & partant a à $\frac{1}{2}p$; or comme a eſt ce qui manque à $x^2 + 2ax$ pour en faire un quarré, le quarré de $\frac{1}{2}p$, c'eſt-à-dire $\frac{1}{2}p^2$ ſera ce qui manque à $xx + px$ pour en faire un quarré, c'eſt-à-dire que $xx + px + \frac{1}{4}p^2$ ſera un quarré; il l'eſt en effet & c'eſt celui de $x - \frac{1}{2}p$. Ayant donc ajouté $\frac{1}{4}pp$ au premier membre de l'Équation, il faut en ajouter autant de l'autre côté, & l'Equation ſera $xx + px + \frac{1}{4}pp = q + \frac{1}{4}pp$. Or la quantité $x + \frac{1}{2}p$ multipliée par elle-même donne $xx + px + \frac{1}{4}pp$; il faut donc que cette quantité ſoit auſſi égale au nombre qui, multiplié par lui-même, donnera $q + \frac{1}{4}pp$. Pour exprimer ce nombre, ou plûtôt cette quantité en général on écrit $\sqrt{q + \frac{1}{4}pp}$.

Le ſigne $\sqrt{}$ indique la racine quarrée.

Employant le ſigne $\sqrt{}$, qu'on appelle ſigne radical, pour faire * reſſouvenir qu'il faut prendre la racine quarrée de la quantité qui le ſuit, laquelle doit être toujours, pour éviter la confuſion, ſurmontée d'une barre ou renfermée entre des parentheſes.

On a donc en employant cette dénomination $x + \frac{1}{2}p = \sqrt{q + \frac{1}{4}p^2}$, d'où l'on tire $x = - \frac{1}{2}p + \sqrt{q + \frac{1}{4}p^2}$ valeur de x dans l'Equation propoſée $xx + px = q$, &

* Le nombre qui multiplié par lui-même en a formé un autre eſt dit ſa racine quarrée, ou ſimplement ſa racine; cette définition connue en arithmetique eſt auſſi admiſe en Algebre pour toutes ſortes de quantités.

cette valeur servira pour toute Equation donnée aussi-tôt qu'en comparant cette Equation avec $xx + px = q$, on en aura déduit les valeurs particulieres de p & de q.

VI.

Si on se souvient presentement que l'on a trouvé (I. Part. art. LX.) qu'en multipliant une quantité négative par une quantité négative, il en vient aussi-bien une quantité positive, que si on avoit multiplié deux quantités positives l'une par l'autre, on verra que la racine d'une quantité positive pourra toujours être affectée du signe que l'on voudra ; ainsi au lieu de l'Equation $x + \frac{1}{2}p = + \sqrt{q + \frac{1}{4}p^2}$ on peut écrire $x + \frac{1}{2}p = - \sqrt{q + \frac{1}{4}p^2}$, ce qui donneroit alors $x = - \frac{1}{2}p - \sqrt{q + \frac{1}{4}p^2}$; d'où l'on tire ce principe général qu'une Equation quelconque du second degré a toujours deux racines. On entend alors par racine d'une Equation la valeur de l'inconnue dans cette Equation. Il faut bien prendre garde de confondre cette expression avec celle de la racine quarrée.

La racine quarrée d'une quantité est aussi-bien négative que positive.

Une Equation du second dégré a deux racines, c'est-à-dire deux valeurs d'x.

VII.

Pour renfermer dans une seule & même expression les deux racines ou valeurs de x dans l'Equation précédente $xx + px = q$, on se sert du signe $\pm$, & l'on écrit ainsi ces deux valeurs $x = - \frac{1}{2}p \pm \sqrt{q + \frac{1}{4}p^2}$.

Formule contenant ces deux racines.

VIII.

Appliquons maintenant cette solution géné-

Application de la formule précédente à l'Equation de l'Art. II.

rale à l'Equation $xx - 100x = -10000\frac{b}{a}$ à laquelle nous étions arrivés dans le problême précédent. En comparant cette Equation avec $x^2 + px = q$, nous aurons $p = -100$; $q = -10000\frac{b}{a}$, & faisant les substitutions de ces valeurs à la place de p & de q dans la formule générale $x = -\frac{1}{2}p \pm \sqrt{q + \frac{1}{4}p^2}$, il viendra $x = 50 \pm \sqrt{2500 - 10000\frac{b}{a}}$.

IX.

Réduction de la valeur d'x en formant la racine du produit par celles des produisans.

On peut donner une forme un peu plus simple à la partie radicale $\sqrt{2500 - 10000\frac{b}{a}}$ de cette valeur de x en partant de ce principe que la racine quarrée du produit de deux ou de plusieurs quantités est le produit des racines quarrées de ces quantités; car décomposant alors $2500 - 10000\frac{b}{a}$ en ses deux produisans 2500 & $1 - \frac{4b}{a}$, & prenant les racines de ces deux quantités, on aura 50 & $\sqrt{1 - \frac{4b}{a}}$, dont le produit $50\sqrt{1 - \frac{4b}{a}}$, sera la valeur de $\sqrt{2500 - 10000\frac{b}{a}}$, c'est-à-dire que la valeur de x sera $50 \pm 50\sqrt{1 - \frac{4b}{a}}$.

Quant à la démonstration de ce principe que la racine d'un produit quelconque, se trouve en multipliant les racines de ses produisans, elle est bien facile à imaginer, lorsqu'on se rappelle l'inverse de ce principe, c'est-à-dire, que pour

quarrer un produit, comme $a b$, on multiplie l'un par l'autre, les quarrés $a a$ & $b b$ de ses produisans a & b.

X.

Pour faire usage de cette valeur de x, il n'est plus besoin que de sçavoir quel est le rapport qu'on veut qu'il y ait entre b & a. Supposons, par exemple, que b soit la partie $\frac{6}{25}$ de a, c'est-à-dire, que le négociant ait trouvé à la seconde année la somme diminuée de ce qu'elle étoit après la premiere d'une quantité égale au $\frac{6}{25}$ du total, on aura par cette supposition $\frac{4b}{a} = \frac{24}{25}$ & $1 - \frac{4b}{25} = \frac{1}{25}$, d'où la racine $\sqrt{1 - \frac{4b}{25}}$ sera $\frac{1}{5}$ & donnera par conséquent $x = 50 \pm 50 \times \frac{1}{5}$ qui exprime à la fois 60 & 40.

Exemple de ce Problême.

Or ces deux valeurs de x resolvent en effet également l'Equation $xx - 100x = - 2400$ dans laquelle l'Equation générale $xx - 100x = - 10000 \frac{b}{a}$ se change par la supposition de $\frac{b}{a} = \frac{6}{25}$: Car $xx - 100x$ devient également $- 2400$, soit qu'on fasse $x = 60$; soit qu'on fasse $x = 40$.

On peut encore d'une maniere plus convainquante reconnoître la nécessité des deux solutions 60 & 40. Car qu'on suppose d'abord $x = 60$, c'est-à-dire que la somme de 100000 ₶ par exemple, perde 60 pour cent par an, il est évident qu'après la premiere année elle sera réduite à 40000 ₶.

A la ſecondé année elle ſera de 16000 ℔ en perdant encore 60 pour cent; or 16000 ℔ ſont plus petits que 40000 ℔ de 24000 ℔ qui ſont les $\frac{6}{25}$ de 100000.

Qu'on ſuppoſe à preſent que la même ſomme de 100000 ℔ perde 40 pour cent par an, après la 1[ere] année elle ſera réduite à 60000 ℔ & après la 2[de] à 36000 ℔ or 36000 ℔ ſont encore plus petits que la ſomme 60000 ℔ de la quantité de 24000 ℔ ou des $\frac{6}{25}$ de 100000 ℔

XI.

Autre exemple.

Si on veut que b ſoit les $\frac{4}{25}$ de a, on aura $x = 50 \pm 50\sqrt{1 - \frac{16}{25}} = 50 \pm 50\sqrt{\frac{9}{25}} = 50 \pm 30$, c'eſt-à-dire ou 80 ou 20 qu'on trouvera encore réſoudre également le Problême.

XII.

Troiſiéme exemple qui demandant la racine d'une quantité négative eſt impoſſible.

Mais ſi l'on ſuppoſe $\frac{b}{a} = \frac{1}{3}$, on trouvera $x = 50 \pm 50\sqrt{1 - \frac{4}{3}}$, ou $50 \pm 50\sqrt{-\frac{1}{3}}$. Or comme on ne ſçauroit trouver aucune quantité qui étant multipliée par elle-même donne —, il s'enſuit que la quantité $\sqrt{-\frac{1}{3}}$ ne ſçauroit être réelle, ou ce qui revient au même, que le Problême eſt impoſſible dans ce cas.

Ainſi on peut être aſſuré qu'il n'y a aucune valeur poſſible à ſubſtituer pour x dans l'Equation $xx - 100x = -\frac{10000}{3}$ qui faſſe que les deux membres en deviennent égaux; ou ce qui revient au même, que la ſomme a ne ſçauroit être alterée chaque année ſuivant aucune pro-

portion donnée qui ſoit telle que de la ſeconde à la troiſiéme année la diminution ſoit d'une quantité égale au tiers du total. Les Géometres regardent cependant comme une eſpece de ſolution ou de racine de l'Equation $xx - 100x = -\frac{10000}{3}$, la valeur $50 \pm 50\sqrt{-\frac{1}{3}}$ qu'ils trouvent alors, mais ils l'appellent une racine imaginaire, & cette racine imaginaire à cauſe du ſigne $\pm$ eſt toujours cenſée une double ſolution.

Ces racines ſont dites imaginaires.

XIII.

On voit par la valeur générale $-\frac{1}{2}p \pm \sqrt{q + \frac{1}{4}pp}$ de x, que toutes les fois que la quantité déſignée par q, ſera négative & plus grande que $\frac{1}{4}pp$, les deux racines de l'Equation $xx + px = q$, ſeront toutes deux imaginaires.

Quelles ſont les Equations du ſecond degré, dont les racines ſont imaginaires.

XIV.

Lorſqu'on a une Equation quelconque du ſecond degré, on peut la réſoudre ſans la comparer terme à terme avec l'Equation générale $xx + px = q$; car on peut, ſans augmenter le calcul, répéter le même procedé qu'on a ſuivi en reſolvant cette Equation générale. Il ne faut pour cela qu'ajouter aux deux membres le quarré de la moitié de ce qui multiplie x dans le ſecond terme du premier membre, & prendre enſuite la racine quarrée des deux membres. Qu'on ait, par exemple, à réſoudre l'Equation $xx + 8x = 9$, en ajoutant des deux côtés 16,

Réſolution des Equations du ſecond dégré ſans les comparer à la formule générale.

quarré de la moitié de 8, on a $xx + 8x + 16 = 9 + 16 = 25$. Et prenant ensuite la racine des deux côtés, on a $x + 4 = \pm 5$, c'est-à-dire $x = -4 \pm 5$ ou $x = -9$ & $x = 1$, & ces deux valeurs resolvent également l'Equation $xx + 8x = 9$.

XV.

Pour accoutumer les Commençans aux difficultés qu'on rencontre dans les Problêmes du second degré, nous leur proposerons encore le Problême suivant.

Autre Problême du second degré.

Trouver sur la ligne qui joint deux lumieres quelconques le point où ces deux lumieres éclairent également, en supposant ce principe de physique, que l'effet d'une lumiere est quatre fois plus grand lorsqu'elle est deux fois plus proche, neuf fois plus grand lorsqu'elle est trois fois plus proche, ou pour s'exprimer comme les Géometres, que son effet est en raison renversée du quarré de la distance.

Que a exprime la distance qui est entre les lumieres données, & que le rapport de m à n soit celui qui est entre l'effet de la plus petite lumiere à une certaine distance & l'effet de la plus grande lumiere à la même distance.

De plus, que x exprime la distance de la plus petite des deux lumieres à un point pris à volonté sur la ligne qui joint les deux lumieres, il est clair que $a - x$ sera la distance du même point à l'autre lumiere, que les quarrés de ces deux distances seront x^2 & $x^2 - 2ax + a^2$, & par conséquent que les quantités qui seront en

raiſon renverſée de ces quarrés ſeront entr'elles comme $\frac{1}{xx}$* & $\frac{1}{xx-2ax+aa}$.

De là il ſuit que ſi les lumieres étoient égales, les effets qu'elles produiroient chacune dans ce même point, ſeroient entr'elles comme $\frac{1}{xx}$ à $\frac{1}{xx-2ax+aa}$, mais ces lumieres ayant des quantités abſolues qui ſont entr'elles dans la raiſon de m à n, leurs effets doivent donc être entr'eux comme $\frac{m}{xx}$ à $\frac{n}{xx-2ax+aa}$.

Préſentement pour que le point pris à volonté devienne le point demandé, il n'y a autre choſe à faire qu'à égaler ces deux quantités, ce qui donnera l'Equation $maa-2amx+mxx=nxx$, qu'on réſoudra ainſi.

On commencera par paſſer les termes mxx & $2amx$ dans l'autre membre, ce qui donnera $\overline{n-m}\times xx+2amx=maa$ ou $xx+\frac{2am}{n-m}x=\frac{aam}{n-m}$.

On ajoutera enſuite aux deux membres de cette Equation le quarré de la moitié du coefficient du ſecond terme, & l'on aura

* Ceci doit être facile à entendre à ceux qui auront vû dans l'Arithmétique ce que c'eſt que des raiſons renverſées. Il n'y a pas plus de difficulté à voir que $\frac{1}{xx}$ & $\frac{1}{xx-2ax+aa}$ ſont en raiſon renverſée de xx & de $xx-2ax\ aa$, qu'à voir que $\frac{1}{3}$ & $\frac{1}{4}$ ſont en raiſon renverſée de 3 & 4.

$$x^2 + \frac{2amx}{n-m} + \frac{aamm}{\overline{n-m}^2} = \frac{aam}{n-m} + \frac{aamm}{\overline{n-m}^2}$$

dont le second membre devient $\frac{aamn}{\overline{n-m}^2}$ en mettant les deux termes $\frac{aam}{n-m} + \frac{aamm}{\overline{n-m}^2}$ au même dénominateur & en réduisant.

Cela fait, on prendra la racine des deux membres de l'Equation, & l'on aura $x + \frac{am}{n-m} = \pm\sqrt{\frac{aamn}{\overline{n-m}^2}}$ ou $x = -\frac{am}{a-m} \pm \frac{a}{n-m}\sqrt{mn}$, en prenant la racine de la partie $\frac{aa}{\overline{n-m}^2}$ qui est un quarré parfait, & laissant sous le signe radical son multiplicateur mn, qui n'est pas un quarré du moins dans toutes les valeurs de m & de n. Donc les deux valeurs d'x qui résolvent l'Equation précédente, & par consequent le Problême qui a conduit à cette Equation sont exprimées par la formule

$$x = -\frac{am}{n-m} \pm \frac{a}{n-m}\sqrt{mn} \text{ ou } x = \frac{a}{n-m} \times \overline{-n \pm \sqrt{mn}}.$$

XVI.

Des deux valeurs précédentes, l'une est nécessai-

On voit par cette expression que l'une des valeurs est nécessairement négative & l'autre positive. Car 1°. si on prend le signe — pour la

la quantité radicale $\sqrt{mn}$, il n'eſt pas douteux que la quantité totale ne ſoit négative. 2°. Si on fait $\sqrt{mn}$ poſitive, $-m+\sqrt{mn}$ qu'on a alors ſera poſitif, parce que ayant fait par la ſuppoſition n plus grand que m, $\sqrt{mn}$ doit être plus grand que m.

rement poſitive, l'autre négative.

XVII.

Si on cherche préſentement l'uſage qu'on doit faire de la valeur négative, on trouvera, en ſe rappellant ce qu'on a vû (I. Part. Art. LXIII.) ſur ces valeurs dans les Equations du premier dégré, qu'elle doit être priſe dans un ſens oppoſé à la premiere, c'eſt-à-dire que le point qu'elle donne pour réſoudre ce Problême, au lieu d'être placé entre les deux lumieres, ſera placé ſur le prolongement de la ligne qui les joint du côté de la lumiere la plus foible.

Uſage de la valeur négative.

On n'aura aucune difficulté à admettre cette poſition de la valeur négative de x, lorſqu'on remarquera que cette même valeur n'a été trouvée négative, que parce qu'on a réſolu le Problême, en regardant le point cherché comme placé entre les deux lumieres, car ſi on avoit fait attention à la poſſibilité de prendre ce point ſur le prolongement de la ligne qui les joint, on auroit eu un autre calcul rélatif à cette poſition, & l'x qui auroit été alors placé naturellement ſur le prolongement de la ligne qui joint les lumieres, auroit été poſitif.

XVIII.

Pour nous faire mieux entendre, nous allons reprendre le Problême en entier, en ſuppoſant le point cherché ſur le prolongement de la ligne

qui joint les lumieres. La diſtance de ce point à la plus petite lumiere étant toujours nommée x, ſa diſtance à la plus grande lumiere ſera alors $a+x$, les quarrés de ces diſtances xx & $aa+2ax+xx$; les deux quantités de lumiere $\frac{m}{xx}$ & $\frac{n}{aa+2xa+xx}$, leſquelles étant égales par les conditions du Problême donneront $\frac{m}{xx}=\frac{n}{aa+2ax+xx}$ ou $maa+2amx+mxx=nxx$ ou $\overline{n-m}\times xx-2amx=maa$ ou $xx-\frac{2amx}{n-m}=\frac{m}{n-m}aa$ qui étant réſolu donnera

$$x=\frac{a\times m\pm\sqrt{mn}}{n-m}$$ dont la premiere valeur

$\frac{a\times m+\sqrt{mn}}{n-m}$ ſera poſitive, & la ſeule qui réſoudra exactement le Problême dans le ſens où il eſt propoſé alors.

Quant à la ſeconde valeur $\frac{a\times m-\sqrt{mn}}{n-m}$ qui eſt négative, elle doit être alors priſe dans un ſens oppoſé à la premiere, c'eſt-à-dire que le point qu'elle donne doit être placé, non comme on l'a ſuppoſé dans ce calcul, ſur le prolongement de la ligne qui joint les deux lumieres, mais ſur cette ligne elle-même.

Ainſi dans cette nouvelle ſolution on a, par rapport aux ſignes, tout le contraire de ce

qu'on avoit dans la premiere, & ces deux ſolutions confirment ce que nous avons déja vû dans la premiere Partie Art. LXIII. que les inconnues qui deviennent négatives doivent toujours être priſes dans un ſens oppoſé à celui qu'on leur a donné en exprimant le Problême.

XIX.

Nous ôterons je crois tout embarras aux Lecteurs ſur ce Problême en prenant un exemple, ſuppoſons que $n = 4m$, c'eſt-à-dire que la plus grande lumiere ait quatre fois plus de force que l'autre ; en ſubſtituant cette valeur de n dans la formule générale de l'Art. XV. $x = \frac{a}{n-m} \times \overline{-m \pm \sqrt{mn}}$; elle deviendra $x = \frac{a}{3} \times \overline{\pm 2 - 1}$, c'eſt-à-dire ou $+\frac{1}{3}a$ ou $-a$, qui fourniſſent deux points également propres à réſoudre le Problême, l'un placé entre les deux lumieres deux fois plus près de la foible que de la forte, & l'autre ſur le prolongement de la ligne qui joint ces lumieres, & à une diſtance de la foible égale à celle qui eſt entre les deux lumieres. Or il eſt très-facile de voir ſans Algebre que ces deux points réſolvent également le Problême, puiſqu'ils ſont l'un & l'autre deux fois plus près de la lumiere foible que de la forte, & que la forte eſt quadruple de la foible.

XX.

Les principes que nous venons de donner ſont ſuffiſants pour toutes les Equations du ſecond degré, mais comme les Commençans ne

peuvent gueres les posseder qu'en les pratiquant, nous allons les exercer à la résolution de plusieurs Equations, ils y trouveront cet avantage, qu'outre qu'ils en sçauront mieux la méthode, ils apprendront en même-tems de nouvelles opérations d'Algebre qui sont sans doute dues aux recherches que les premiers Analystes ont fait sur les Equations du second degré.

Nouveaux exemples de résolutions d'Equations du second dégré.

Soit $bxx = 2c^2x + 2cca$, en ordonnant cette Equation, c'est-à-dire en passant les termes affectés de x du même côté & divisant tous les termes par le coefficient de xx, on aura $x^2 - \frac{2ccx}{b} = \frac{2cca}{b}$, aux deux membres de laquelle ajoutant $\frac{c^4}{bb}$, & prenant ensuite la racine quarrée, on aura $x - \frac{cc}{b} = \pm\sqrt{\frac{2ccab + c^4}{bb}} = \pm\frac{c}{b}\sqrt{2ab + cc}$, c'est-à-dire $x = \frac{cc \pm \sqrt{2ab + cc}}{b}$.

Soit $ff + gg - 2gx + xx = \frac{mmxx}{nn}$ qui devient d'abord $\frac{mm - nn}{nn} \times xx + 2gx = ff + gg$, & ensuite $xx + \frac{2gnn}{mm - nn}x = \frac{ffnn + ggnn}{mm - nn}$ ou $xx + \frac{2gnnx}{mm - nn} + \frac{ggn^4}{\overline{mm - nn}^2} = \frac{ffnn + ggnn}{mm - nn} + \frac{ggn^4}{\overline{mm - nn}^2}$

$$= \frac{ffnnmm + ggnnmm - ffn^4}{\overline{mm - nn}^2}$$, d'où l'on tire

$$x + \frac{gnn}{mm-nn} = \pm \frac{n\sqrt{ffmm+ggmm-ffnn}}{mm-nn}$$ ou

$$x = \frac{n}{mm-nn} \times -gn \pm \sqrt{ffmm+ggmm-ffnn}.$$

Soit $abc - aff + 2afz = azz - bzz$ qui étant d'abord ordonnée deviendra

$$zz - \frac{2af}{a-b} z = \frac{abc - aff}{a-b}$$, enſuite

$$zz - \frac{2af}{a-b} z + \frac{aaff}{\overline{a-b}^2} = \frac{abc - aff}{a-b} + \frac{aaff}{\overline{a-b}^2} = \frac{aabc - abbc + abff}{\overline{a-b}^2}$$ qui

donne $z = \frac{af \pm \sqrt{aabc - abbc + abff}}{a-b}$

Soit à préſent l'Equation $4a^2 - 2x^2 + 2ax = 18ab - 18bb$, en l'ordonnant on aura $xx - ax = 2aa - 9ab + 9bb$, ou $xx - ax + \frac{1}{4}aa = \frac{9}{4}aa - 9ab + 9bb$ qui donne $x = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{\frac{9}{4}aa - 9ba + 9bb}$.

On réduira aiſément cette quantité ſi on a vû, & on ne pouvoit gueres manquer de le voir dans tout ce que nous venons de dire, que le quarré d'une quantité compoſé de deux termes, devoit être égal à la ſomme des quarrés de chacun de ces deux termes, & au double produit de ces deux termes.

Car trouvant dans la quantité $\frac{9}{4}aa - 9ba$

$+9bb$ les termes $\frac{9}{4}aa$ & $9bb$ qui ſont les quarrés de $\frac{3}{2}a$ & de $3b$, & le terme $9ab$ qui eſt le double produit de $\frac{3}{2}a$ & de $3b$, on voit aiſément que cette quantité $\frac{9}{4}aa - 9ba + 9bb$ eſt le quarré de $\frac{3}{2}a - 3b$. Donc au lieu de l'expreſſion $\sqrt{\frac{9}{4}aa - 9ba + 9bb}$, on peut écrire ſimplement $\frac{3}{2}a - 3b$: donc la valeur de x eſt alors $\frac{1}{2}a \pm \frac{3}{2}a \mp 3b$, c'eſt-à dire ou $2a - 3b$, ou $-a + 3b$, en effet l'on voit que ces valeurs réſolvent également l'Equation donnée.

XXI.

Comme dans les différentes Equations du ſecond dégré qu'on peut avoir à réſoudre, il arrivera ſouvent des cas de même nature que celui qu'on vient de traiter ; il faut avoir quelque méthode ſûre & générale pour reconnoître les quantités qui ſont des quarrés ; & pour trouver leurs racines, cette méthode eſt aiſée à tirer des principes que nous venons d'employer dans l'exemple précédent, en voici le procédé ſur un autre Exemple.

Procédé de l'extraction de la racine quarrée expliqué ſur un exemple.

Soit la quantité $30ab + 9bb + 25a^2$ dont on demande la racine quarrée.

J'ordonne d'abord cette quantité par rapport à une des lettres qu'elle contient, par rapport à a, par exemple, & j'écris par conſéquent cette quantité, ainſi qu'on la voit dans la Table ci-jointe caſe 1.

Je prends enſuite la racine du premier terme $25a^2$, laquelle eſt $5a$ que je prends pour premier terme de la racine cherchée, & que

j'écris à côté de la quantité proposée $25a^2 + 30ba + 9bb$, ayant tiré auparavant une barre pour éviter la confusion. Je place alors sous la proposée le quarré $25a^2$ de $5a$ en lui donnant le signe —, je tire une barre & je réduis, j'ai par ce moyen la quantité $30ba + 9bb$ que j'écris sous la barre; cela fait, je double $5a$, ce qui me donne $10a$ que j'écris au-dessus de $5a$, & je divise ensuite le premier terme $30ba$ de la quantité $30ba + 9bb$ par $10a$, & j'écris le quotient $3b$ qui est le second terme de la racine cherchée à côté de $5a$, je l'écris en même-tems à côté de $10a$, & je multiplie ce nouveau terme $3b$ de la racine par la quantité supérieure $10a + 3b$, en observant comme dans la division de changer les signes en écrivant le produit sous la quantité $30ab + 9bb$; faisant alors la réduction, & voyant que tout se détruit, je conclus que $5a + 3b$ est la racine cherchée.

XXII.

Pour fortifier les Commençans dans la méthode d'extraire les racines quarrées, il ne sera pas inutile de leur faire parcourir les deux exemples suivans.

Soit d'abord proposé d'extraire la racine quarrée de la quantité $4a^2 - 4ba + 4ca + bb - 2cb + cc$ ordonnée par rapport à a. *Autres exemples d'extraction de racine quarrée.*

Je commence par prendre la racine de $4a^2$, laquelle est $2a$ que j'écris à côté de la proposée, (voyez la seconde case de la Table ci-jointe) je retranche ensuite le quarré $4aa$,

& j'écris le reſte $-4ba+4ca+b^2-2cb+cc$, je double $2a$, & j'écris le double $4a$ au-deſſus, je diviſe le terme $-4ba$ par $4a$, & j'écris le quotient $-b$, tant à côté de la racine que du diviſeur $4a$, multipliant alors $-b$ par $4a-b$, j'ai en changeant les ſignes $+4ba-bb$ qui étant placé ſous le dividende donne après la réduction $+4ca-2cb+cc$ qui doit ſervir encore de dividende, je double alors la racine $2a-b$, & j'écris le double $4a-2b$ au-deſſus, je diviſe $+4ca$ par $4a$, & j'écris le quotient $+c$ à côté de la racine $2a-b$, & à côté du diviſeur; faiſant enſuite la multiplication de $+c$ par $4a-2b+c$, & écrivant avec des ſignes différens le produit ſous le dividende, tout ſe détruit, d'où je conclus que la racine eſt poſſible, & qu'elle eſt $2a-b+c$.

Soit enſuite propoſé d'extraire la racine quarrée de la quantité $4x^4+8ax^3+4a^2x^2+16b^2x^2+16b^2ax+16b^4$ ordonnée par rapport à x, en ſuivant les opérations qui ſont écrites dans la table ci-jointe caſe 3, on verra facilement que la racine de cette quantité eſt de $2xx+2ax+4bb$.

XXIII.

Dans les différens exemples que nous avons donné concernant les réſolutions des Equations du ſecond dégré, les Commençans n'ont gueres pû trouver de difficultés que lorſqu'il étoit queſtion de réduire les quantités radicales en ôtant de deſſous le ſigne,

$$\begin{array}{l|l} 25a^2 + 30ba + 9b^2 & 10a + 3b \\ -25a^2 & 5a + 3b \\ \hline 30ba + 9b^2 & \\ -30ba - 9b^2 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Case 1.

$$\begin{array}{l|l} 4a^2 - 4ba + 4ca + b^2 - 2cb + cc & 4a - 2b + c \\ -4a^2 & 4a - b \\ \hline -4ba + 4ca + b^2 - 2cb + cc & 2a - b + c \\ +4ba \quad\quad - b^2 & \\ \hline 4ca \quad - 2cb + cc & \\ -4ca \quad + 2cb - cc & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Case 2.

$$\begin{array}{l|l} 4x^4 + 8ax^3 + 4a^2x^2 + 16b^2x^2 + 16b^2ax + 16b^4 & 4x^2 + 4ax + 4b^2 \\ -4x^4 & 4x^2 + 2ax \\ \hline 8ax^3 + 4a^2x^2 + 16b^2x^2 + 16b^2ax + 16b^4 & 2x^2 + 2ax + 4b^2 \\ -8ax^3 - 4a^2x^2 & \\ \hline 16b^2x^2 + 16b^2ax + 16b^4 & \\ -16b^2x^2 - 16b^2ax - 16b^4 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Case 3.

les quantités quarrées qui étoient des produisans de la quantité radicale ; en effet cette opération est la plus délicate de celles qui peuvent entrer dans la résolution des Equations du second dégré, il est donc important que les Commençans s'appliquent à la pratiquer facilement. Pour les aider à y parvenir, nous joindrons ici les exemples suivans.

Exemples de réduction de quantités radicales.

$$\sqrt{48aabc} = 4a\sqrt{3bc}$$

$$\sqrt{\frac{a^3b - 4aabb + 4ab^3}{cc}} = \frac{\overline{a - 2b}\sqrt{ab}}{c}$$

$$\sqrt{\frac{aahhmm}{ppzz} + \frac{4aam^3}{pzz}} = \frac{am}{pz}\sqrt{hh + 4mp}$$

$$6\sqrt{\frac{75}{98}abb} = \frac{30b}{7}\sqrt{\frac{3a}{2}}.$$

XXIV.

Les quantités qui n'ont point de racines exactes sont dites incommensurables ou irrationelles.

Presqu'aussitôt que les Equations du second dégré ont fait connoître les quantités irrationelles ou incommensurables (on appelle ainsi les quantités qui n'ont point de racines exactes) on a été obligé de faire sur ces mêmes quantités les mêmes opérations que sur les quantités rationelles ou commensurables, c'est-à-dire qu'on a eu à ajouter, à soustraire, à multiplier, à diviser des quantités, ou toutes incommensurables, ou en partie incommensurables, & en partie commensurables.

L'addition & la soustraction de ces quantités ne supposent que leur réduction.

Quant à l'addition & à la soustraction des quantités radicales, elles ne renferment aucune difficulté que celles de la réduction de ces mêmes quantités à leurs plus simples expressions.

Par exemple, s'il faut ajouter $\sqrt{48abb}$ avec $b\sqrt{75a}$, je change la premiere de ces quantités en $4b\sqrt{3a}$, & la ſeconde en $5b\sqrt{3a}$, dont la ſomme eſt $9b\sqrt{3a}$.

De la même maniere $\sqrt{48c^3} - \sqrt{\frac{16}{27}c^3} = \frac{32}{9}c\sqrt{3c}$.

$$\sqrt{\frac{ab^3}{cc}} + \frac{1}{2c}\sqrt{a^3b - 4aabb + 4ab^3}$$

$$= \frac{a}{2c}\sqrt{ab}.$$

$$a\sqrt{\frac{a^3b}{3aa+6ac+3cc}} - \frac{bc\sqrt{ab}}{a+c}$$

$$= \frac{aa}{\sqrt{3}} - bc \times \frac{\sqrt{ab}}{a+c}.$$

XXV.

Multiplication des incommensurables.

A l'égard de la multiplication, ſi les quantités qu'on a à multiplier ſont toutes deux incommenſurables, il eſt clair qu'il n'y aura autre choſe à faire qu'à multiplier les quantités qui ſont ſous le ſigne radical, & mettre le même ſigne radical à la tête du produit ; s'il ſe trouve alors des réductions à faire, on les fera comme ci-deſſus.

Qu'on ait à multiplier, par exemple, $\sqrt{ab} \times \sqrt{ac}$ on écrira $\sqrt{aabc}$ ou $a\sqrt{bc}$

De même $\sqrt{3cd} \times \sqrt{4fgc} = \sqrt{12fgccd} = 2c\sqrt{3fgd}$.

Lorſque les quantités radicales qu'on aura à multiplier ſeront égales, il faudra ſimplement ôter le ſigne radical. Pour multiplier, par exemple $\sqrt{a^3cd}$ par $\sqrt{a^3cd}$, on écrit ſimple-

ment la quantité $a^3 cd$ ſans ſigne radical.

Si la quantité qui multiplie un radical eſt rationelle, il faut ſe contenter de l'écrire devant le ſigne avec une barre au-deſſus lorſqu'elle a pluſieurs termes; ſi on vouloit la faire entrer ſous le ſigne radical, il faudroit la quarrer auparavant.

Par exemple, le produit de $a+b$ par $\sqrt{\frac{ffg}{aa-bb}}$ eſt $\overline{a+b}\sqrt{\frac{ffg}{aa-bb}}$

ou $\sqrt{\frac{ffg\times\overline{aa+2ab+bb}}{aa-bb}}$

ou $\sqrt{\frac{ffg\times\overline{a+b}}{a-b}}$ ou $\frac{f\sqrt{\overline{ag+bg}}}{\sqrt{a-b}}$.

$$2a\sqrt{\frac{aa+bb}{c}}\times -3a\sqrt{\frac{aa+bb}{d}}$$

$$= -\frac{6aa\times\overline{aa+bb}}{\sqrt{cd}} = -\frac{6a^4+6aabb}{\sqrt{cd}}$$

$$\sqrt{\overline{a+b}}\times\sqrt{\overline{a-b}}=\sqrt{\overline{aa-bb}}.$$

S'il eſt queſtion de multiplier des quantités compoſées de pluſieurs autres, ou toutes radicales, ou en partie radicales & en partie incommenſurables, l'opération n'en ſera pas plus difficile que les précédentes, pourvû qu'on ſe rappelle les régles ordinaires des multiplications des quantités complexes.

Par exemple, $\overline{3a\sqrt{bc}-2b\sqrt{ac}}\times 2c\sqrt{ab}$ $=6abc\sqrt{ac}-4abc\sqrt{bc}.$

$$\overline{a+\sqrt{aa-bb}}\times\overline{a+\sqrt{aa-bb}}$$

$$=2aa-bb+2a\sqrt{aa-bb}.$$

$$\overline{a+\sqrt{aa-xx}} \times \overline{a-\sqrt{aa-xx}} = xx.$$

XXVI.

Diviſion des Incommenſurables.

Lorſqu'il s'agira de diviſer deux quantités irrationnelles l'une par l'autre, on diviſera les quantités qui ſont ſous le ſigne, & l'on mettra le ſigne devant le quotient.

S'il faut diviſer une quantité irrationelle par une rationnelle, on mettra ſimplement la rationnelle ſous l'autre avec une barre aſſez longue pour qu'on puiſſe connoître que le ſigne ne porte pas deſſus, ſi on veut au contraire, que le ſigne radical y porte, il faudra quarrer le diviſeur.

S'il y a des quantités commenſurables devant les radicaux, on les diviſera à l'ordinaire, & on écrira leur quotient à côté du quotient radical : toutes ces choſes s'entendront ſans aucune peine par les exemples

$$\frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{a}} = \sqrt{b}; \quad \frac{ac\sqrt{bc}}{a\sqrt{b}} = c\sqrt{c}; \quad \frac{12\,ac\sqrt{6bc}}{4c\sqrt{2b}} = 3\,a\sqrt{3c}$$

$$\frac{\sqrt{aa-xx}}{\sqrt{a+x}} = \sqrt{a-x}; \quad \frac{\sqrt{aabb-bbxx}}{a-x} = b\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}$$

XXVII.

Ce qu'on vient de dire concernant les Equations du ſecond dégré ſuffit lorſque ces Equations ne renferment qu'une inconnue ; mais comme on rencontre ſouvent des Problêmes dans leſquels il eſt néceſſaire d'en employer

plusieurs, il faut voir comment l'on traite ces Problêmes, nous prendrons dans cette vûe l'exemple suivant.

Trouver trois quantités en progression géométrique, dont la somme soit donnée, ainsi que la somme de leurs quarrés.*

Problême du second dégré demandant plusieurs inconnues.

Soient les trois quantités cherchées x, y, z, on aura par la nature des progressions $x : y = y : z$, c'est-à-dire $yy = xz$; de plus, parceque leur somme est donnée, en nommant cette somme a, on aura $x + y + z = a$, enfin en nommant la somme de leurs quarrés bb on aura par la derniere condition du Problême $xx + yy + zz = bb$.

Pour faire usage de ces trois Equations on commencera par chasser z au moyen de sa valeur $a - x - y$ tirée de l'Equation $x + y + z = a$; substituant donc cette valeur de z dans les deux autres Equations, elles se changeront en $2yy + 2xx + 2xy + aa - 2ax - 2ay = bb$, & $yy = ax - xx - xy$. Pour chasser ensuite celle qu'on voudra des deux inconnues que renferment ces deux Equations, on trouvera la valeur que cette inconnue a dans chacune de ces Equations, & on égalera les deux valeurs que l'on aura par ce moyen, or ces deux opérations

* Trois quantités dont la premiere est à la seconde, comme la seconde à la troisiéme, telles que 8, 12, 18, par exemple, sont dites en progression géometrique ou en proportion continue. On ne sçauroit entendre la théorie des proportions qu'on ne sçache en même-tems celle des progressions.

ſont faciles par les principes précédens, on aura pour la premiere Equation

$$x = -\frac{1}{2}y + \frac{1}{2}a \pm \sqrt{\frac{bb}{2} - \frac{aa}{4} - \frac{3}{4}yy + \frac{1}{2}ay}$$

& pour la ſeconde

$x = -\frac{1}{2}y + \frac{1}{2}a \pm \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{2}ay - \frac{3}{4}yy}$, il n'y a donc plus qu'à égaler ces deux valeurs, ce qui donnera l'Equation

$$-\frac{1}{2}y + \frac{1}{2}a \pm \sqrt{\frac{bb}{2} - \frac{aa}{4} - \frac{3}{4}yy + \frac{1}{2}ay}$$

$= -\frac{1}{2}y + \frac{1}{2}a \pm \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{2}ay - \frac{3}{4}yy}$ qu'il ne s'agit plus que de réſoudre.

On remarquera premierement que les termes $-\frac{1}{2}y + \frac{1}{2}a$ ſont communs des deux côtés, & que par conſéquent l'Equation ſe réduit à

$$\pm\sqrt{\frac{bb}{2} - \frac{aa}{4} - \frac{3}{4}yy + \frac{1}{2}ay}$$

$= \pm\sqrt{\frac{1}{4}aa - \frac{1}{2}ay - \frac{3}{4}yy}$. Or en quarrant les deux membres de cette Equation, les deux radicaux diſparoiſſent tout de ſuite, & l'Equation devient en réduiſant $ay = \frac{1}{2}aa - \frac{1}{2}bb$ qui donne $y = \frac{aa - bb}{2a}$, ſubſtituant enſuite cette valeur de y dans l'une des précédentes de x, on aura . . . . $x = \frac{1}{4}a + \frac{bb}{aa}$

$$\pm\sqrt{\frac{1}{4}aa - \frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}bb - \frac{3}{16}aa + \frac{3}{8}bb - \frac{3b^4}{16aa}}$$

ou $x = \frac{bb + aa \pm \sqrt{10bbaa - 3a^4 - 3b^4}}{4a}$

& en ſubſtituant la valeur de x & celle de y dans $z = a - x - y$, on aura enfin

$$z = \frac{aa + bb \mp \sqrt{10bbaa - 3a^4 - 3b^4}}{4a}$$

XXVIII.

Comme on eſt arrivé dans cette ſolution à une valeur extrêmement ſimple pour y, après avoir eu des radicaux aſſez composés, on doit ſoupçonner qu'on pouvoit y arriver par une voye plus courte; en effet avec un peu de reflexion, on trouve facilement la méthode ſuivante.

Autre maniere de reſoudre les Equations précédentes.

Soient repriſes les deux Equations

$x^2 - ax + yx = \frac{bb}{2} - \frac{aa}{2} - y^2 + ay$ &

$x^2 + xy - ax = - yy$; en retranchant ces deux Equations l'une de l'autre on a

$o = \frac{bb}{2} - \frac{aa}{2} + ay$ d'où l'on tire

$y = \frac{aa - bb}{2a}$ qui étant ſubſtitué dans l'une ou l'autre de ces deux Equations donne.....

.... $x^2 + \frac{aax - bbx}{2a} - ax$

$= \frac{-a^4 + 2aabb - b^4}{4aa}$ ou $x^2 - \frac{\overline{bb + aa} \times x}{2a}$

$= \frac{-a^4 + 2aabb - b^4}{4aa}$ d'où l'on tire la même valeur de x que ci-deſſus.

XXIX.

Dans ce Problême on a eu des quantités qui ſe ſont détruites par une eſpece de hazard, ce qui a extrêmement ſimplifié les calculs; mais comme les Equations du ſecond

dégré à plusieurs inconnues n'offrent pas toujours de pareilles facilités, il faut sçavoir ce qu'on feroit dans des cas moins simples. Pour cela soit pris, par exemple les deux Equations $x^2 + ax - 2xy = aa + 2yy$; $xx - 2ax + xy = 2aa - yy$.

Exemple d'Equation du second dégré à deux inconnues plus compliqué que le précédent.

La premiere de ces Equations donne $x = -\frac{1}{2}a + y \pm \sqrt{\frac{5}{4}aa - ay + 3yy}$, l'autre donne
$x = a - \frac{1}{2}y \pm \sqrt{3aa - ay - \frac{3}{4}yy}$ égalant ensuite ces deux valeurs & réduisant on a
$-\frac{3a}{2} + \frac{3}{2}y \pm \sqrt{\frac{5}{4}aa - ay + 3yy}$
$= \pm \sqrt{3aa - ay - \frac{3}{4}yy}$.

Pour faire ensuite évanouir les radicaux de cette Equation, je commence par quarrer ses deux membres, ce qui me donne $\frac{9}{4}yy - \frac{9}{2}ay + \frac{9}{4}aa \pm \overline{3y - 3a}\sqrt{\frac{5}{4}aa - ay + 3yy} + \frac{5}{4}aa - ay + 3yy = 3aa - ay - \frac{3}{4}yy$ qui contient encore un radical; afin de le faire disparoître, j'écris ainsi cette Equation .... $-\frac{1}{2}aa + \frac{9}{2}ay - 6yy = \pm \overline{3y - 3a}\sqrt{\frac{5}{4}aa - ay + 3yy}$, en la réduisant & laissant la quantité radicale .... $\pm \overline{3y - 3a}\sqrt{\frac{5}{4}aa - ay + 3yy}$ seule d'un côté de l'Equation, cela fait, je quarre les deux membres, & j'ai
$\frac{1}{4}a^4 - \frac{9}{2}a^3y + \frac{105}{4}aayy - 54ay^3 + 36y^4$
$= \overline{9yy - 18ay + 9aa} \times \overline{\frac{5}{4}aa - ay + 3yy}$
ou en réduisant

Equation finale à laquelle conduisent ces Equations.

$9y^4 + 9ay^3 - 30aayy + 27a^3y = 11a^4$
c'est-là l'Equation qui résulte des deux précédentes,

dentes, & celle qu'il faudroit résoudre pour avoir la solution du Problême qui auroit donné ces deux Equations, on voit par-là qu'il n'en est pas des Equations du second dégré à plusieurs inconnues, comme de celles du premier qui ne donnent jamais une Equation finale d'un autre dégré qu'elles.

XXX.

On peut sans avoir la peine de résoudr les Equations du second dégré, & de chasser ensuite leurs radicaux, parvenir également à l'Equation finale.

Autre maniere de traiter le même exemple.

Soit repris pour le faire voir les deux Equations précédentes, & soit tirée la valeur de xx de chacune d'elles, la premiere fournira $x^2 = aa + 2yy - ax + 2xy$, la seconde $x^2 = 2aa - yy + 2ax - xy$, égalant ces deux valeurs on a $aa + 2yy + 2xy - ax = 2aa - yy - xy + 2ax$, d'où l'on tire $x = \frac{3yy - aa}{3a - 3y}$, qui étant substitué dans l'une ou l'autre des deux Equations données, dans $xx - 2ax + xy = 2aa - yy$, par exemple, la change en

$$\frac{9y^4 - 6aayy + a^4}{\overline{3a - 3y}^2} + \frac{\overline{y - 2a} \times \overline{3yy - aa}}{3a - 3y}$$

$= 2aa - yy$, qui étant réduite donne la même Equation

$$9y^4 + 9ay^3 - 30aayy + 27a^3y = 11a^4.$$

XXXI.

Pour rompre les Commençans à l'uſage de cette méthode qui eſt d'un grand uſage dans l'analyſe, nous allons l'appliquer aux deux Equations

$$x^2 + axy + bx = cy^2 + dy + e$$
$$x^2 + fxy + gx = hy^2 + iy + k.$$

qui contiennent chacune la plus grande complication que puiſſent avoir les Equations du ſecond dégré à deux inconnues.

Tirant une valeur de xx de chacune de ces Equations & les égalant on aura

$$\overline{a-f} \times xy + \overline{b-g} \times x = \overline{c-h} \times y^2 + \overline{d-i} \times y + e - k$$

laquelle, en faiſant pour abréger les calculs, $a - f = l$; $b - g = m$; $c - h = n$; $d - i = p$, $e - k = q$ ſe change en $lxy + mx = ny^2 + py + q$ d'où je tire $x = \frac{ny^2 + py + q}{ly + m}$ que je ſubſtitue dans l'une ou dans l'autre des deux Equations données, dans la premiere, par exemple, j'ai

$$\frac{\overline{ny^2 + py + q}^2}{\overline{ly + m}^2} + \frac{\overline{ay + b} \times \overline{ny^2 + py + q}}{ly + m}$$
$$= cy^2 + dy + e$$

ou $\overline{ny^2 + py + q}^2 + \overline{ay + b} \times \overline{ny^2 + py + q} \times \overline{ly + m}$
$= \overline{cy^2 + dy + e} \times \overline{ly + m}^2$

En faiſant alors les opérations indiquées, réduiſant & ordonnant, il vient enfin

$$y^4 + \frac{bln + amn + alp + 2np - 2mlc - l^2 d}{aln + nn - l^2 c} y$$

$$+\frac{bmn+qal+pbl+pam+p^2+2nq-m^2c-2mld-el^2}{aln+nn-l^2c}y^2$$

$$+\frac{blq+amq+bmp+2pq-m^2d-2mel}{aln+nn-l^2c}y$$

$=\frac{m^2e-q^2-bmq}{aln+n^2-l^2c}$, Equation du quatriéme dégré résultant des deux Equations du second dégré les plus générales.

XXXII.

Si on avoit des Equations telles que $xxy + axy = abb$ & $xxyy + ccyx = a^4$, ces Equations ne seroient point comptées parmi celles du second dégré à cause que le produit inconnu de x^2 par y est de trois dimensions & que celui de x^2 par y^2 est de quatre dimensions, mais la méthode précédente serviroit avec la même facilité à chasser les x de ces deux Equations. Pour le faire voir, supposons que α représente toutes les quantités composées d'y & de connues, à quelque dégré qu'elles montent, qui peuvent multiplier x^2 dans l'une des Equations données; β toutes celles qui multiplient x dans la même Equation; γ les quantités entierement connues qui sont de l'autre côté de la même Equation, c'est-à-dire que cette premiere Equation sera $\alpha x^2 + \beta x = \gamma$. Que la seconde soit de même $\delta x^2 + \varepsilon x = \varphi$.

y étant à un dégré quelconque, & x seulement au second dégré, on traiteroit de même les deux Equations.

On tirera de la premiere $x^2 = \frac{\gamma - \beta x}{\alpha}$, &

de la ſeconde $x^2 = \frac{\varphi - \varepsilon x}{\delta}$ leſquelles étant égalées donnent $\gamma\delta - \beta\delta x = \varphi\alpha - \varepsilon\alpha x$ d'où l'on tire $x = \frac{\varphi\alpha - \gamma\delta}{\varepsilon\alpha - \beta\delta}$, qui étant ſubſtitué dans l'Equation $\alpha x^2 + \beta x = \gamma$, donne

$$\alpha \times \overline{\varphi\alpha - \gamma\delta}^2 + \beta \times \overline{\alpha\varepsilon - \beta\delta} \times \overline{\varphi\alpha - \gamma\delta} = \gamma \times \overline{\varepsilon\alpha - \beta\delta}^2$$

dans laquelle mettant pour α, β, γ, δ, ε, φ leurs valeurs compoſées de *y*, & de connues l'on aura l'Equation cherchée.

XXXIII.

Ce qu'il faudroit faire pour arriver à l'Equation finale lorſque x ſeroit au troiſiéme dégré.

Si les x ainſi que les y montoient chacunes à des dégrés plus haut que le ſecond, on pourroit encore dans ce cas employer la méthode précédente, ſuppoſons, par exemple, qu'on ait les deux Equations

$$\alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x = \delta, \ \& \ \varepsilon x^3 + \varphi x^2 + \chi x = \eta$$

dans leſquelles α, β, γ, δ, ε, φ, χ, η repréſentent toutes ſortes de quantités compoſées d'*y* & de connues, on commencera par prendre x^3 dans chacune de ces Equations, & on égalera ſes deux valeurs, ce qui donnera

$$\frac{\delta - \beta x^2 - \gamma x}{\alpha} = \frac{\eta - \varphi x^2 - \chi x}{\varepsilon} \text{ ou}$$

$$\delta\varepsilon - \overline{\varepsilon\beta x^2 - \gamma\varepsilon x} = \eta\alpha - \overline{\varphi\alpha x^2 - \chi\alpha x}$$

ou $\varphi\alpha - \varepsilon\beta \times x^2 = \gamma\varepsilon - \chi\alpha \times x + \eta\alpha - \delta\varepsilon$

dans laquelle x n'eſt qu'au ſecond dégré. Multipliant enſuite cette Equation par αx, ainſi que l'Equation $\alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x = \delta$

par $\varphi\alpha - \varepsilon\beta$, j'ai les deux Equations

$$\overline{\varphi\alpha^2 - \alpha\varepsilon\beta} \times x^3 = \overline{\gamma\varepsilon\alpha - \chi\alpha^2} \times x^2 + \overline{\eta\varepsilon\alpha - \delta\varepsilon\alpha} \times x$$

& $\overline{\varphi\alpha^2 - \alpha\varepsilon\beta} \times x^3 + \overline{\beta\varphi\alpha - \beta^2\varepsilon} \times x^2 + \overline{\gamma\varphi\alpha - \gamma\varepsilon\beta} \times x$
$= \delta \times \overline{\varphi\alpha - \varepsilon\beta}$.

Desquelles je chasse x^3 comme des deux premieres Equations, ce qui me donne

$$\overline{\alpha \times \overline{\gamma\varepsilon - \chi\alpha} + \beta \times \overline{\varphi\alpha - \beta\varepsilon}} \times x^2$$

$$+ \overline{\alpha \times \overline{\eta\varepsilon - \delta\varepsilon} + \gamma \times \overline{\varphi\alpha - \varepsilon\beta}} \times x$$

$= \delta \times \overline{\varphi\alpha - \varepsilon\beta}$. Dans laquelle x ne monte non plus qu'au second dégré, voilà donc le Problême réduit présentement au cas qu'on a résolu dans l'article précédent, c'est-à-dire à celui où l'on a deux Equations dans lesquelles l'inconnue x ne monte qu'au second dégré; il est donc inutile d'achever ici le calcul, puisqu'il n'auroit de difficulté que celle de sa longueur.

XXXIV.

Si l'inconnue qu'on veut chasser des deux Equations proposées, s'y trouvoit élevée à un dégré plus haut que le troisiéme, on voit bien que par une opération semblable à la précédente on les changeroit d'abord en deux autres Equations d'un dégré moindre, & que par ce moyen on parviendroit toujours à chasser entierement l'inconnue.

Ce seroit la même chose si x montoit à des dégrés plus élevés.

XXXV.

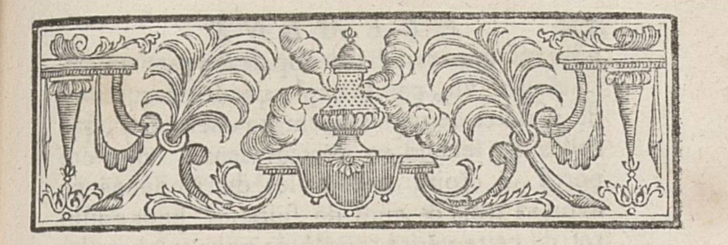
Si au lieu de deux inconnues on en avoit trois

Et s'il y avoit plus de deux inconnues on parviendroit de même à l'Equation finale.

élevées chacune à un dégré quelconque, il est clair que pourvû qu'on eut trois Equations, on parviendroit par la même méthode à une Equation finale qui ne contiendroit que celle que l'on voudroit de ces trois inconnues ; car oubliant d'abord une de ces trois inconnues, deux des trois Equations suffiroient pour arriver à une seule qui ne renfermeroit que l'inconnue oubliée, & que celle que l'on voudroit des deux autres inconnues. Faisant ensuite la même opération avec l'une des deux Equations employée dans la premiere opération & la troisiéme Equation, on parviendroit à une autre Equation, entre les deux mêmes inconnues, c'est-à-dire que le Problême seroit réduit à celui où l'on a deux Equations à deux inconnues, d'où l'on parviendroit enfin à une seule inconnue renfermée dans une Equation.

Si on avoit quatre Equations & quatre inconnues, on réduiroit de même la question à trois Equations & trois inconnues, puis à deux Equations & deux inconnues, puis enfin à une seule Equation & à une inconnue; Il en seroit de même pour un plus grand nombre d'Equations & d'inconnues.





ELEMENS D'ALGEBRE.

TROISIE'ME PARTIE.

Où l'on donne quelques principes généraux pour les Equations de tous les dégrés, avec la méthode de tirer de ces Equations, celles du premier & du ſecond dégré qu'elles peuvent renfermer.

SI les Equations plus élevées que le ſecond dégré ont préſenté de grandes difficultés, lorſqu'on a entrepris de les réſoudre dans tous les cas, il a été du moins aſſez facile de faire ſur ces Equations des réfléxions générales qui pouvoient en faire connoître la nature, & ſervir

à les résoudre dans beaucoup de cas particuliers.

Ayant vû, par exemple que les Equations du premier dégre n'avoient qu'une racine, que celles du second en avoient deux, on a été porté à croire que celles du troisiéme en avoient trois & ainsi de suite, & pour s'assurer de cette vérité, ou plûtôt pour comprendre comment une Equation pouvoit avoir autant de racines qu'elle a de dégrés, on a cherché l'inverse du Problême qu'on s'étoit proposé d'abord, c'est à-dire qu'au lieu de chercher les racines d'une Equation, on a cherché quelle seroit l'Equation qui auroit pour ses racines des quantités données, probléme infiniment plus facile que le premier.

I.

Maniere de former une Equation par le moyen de ses racines.

Qu'on demande, par exemple quelle est l'Equation dans laquelle x pourra avoir également pour valeur ou 2, ou 3, ou 5; on n'a qu'à former ces trois Equations simples $x-2=0$; $x-3=0$, $x-5=0$, multipliant ensuite les deux premieres l'une par l'autre, & leur produit par la troisiéme, on a $x^3-10x^2+31x-30=0$, dans laquelle on peut supposer également $x=2$, ou $=3$, ou $=5$. On voit aisément que chacune de ces valeurs étant substituée à la place de x dans l'Equation $x^3-10x^2+31x-30=0$, doit la résoudre, ou ce qui revient au même, en doit faire évanouir tous les termes, car cette Equation pouvant s'écrire ainsi $\overline{x-2}\times\overline{x-3}\times\overline{x-5}=0$, chacune de

ſes parties étant égalée à zero doit, à cauſe qu'elle multiplie toutes les autres, les faire évanouir en même-tems ; or la ſuppoſition de $x = 2$, ou $= 3$, ou $= 5$ rend toujours zero l'une des trois parties $x - 2$, $x - 3$, $x - 5$.

II.

Une Equation a autant de racines que de dégrés.

Par cette méthode on voit comment une Equation peut avoir autant de racines que de dégrés ; pour traiter la queſtion plus en général, ſoient a, b, c, d, e, les racines d'une Equation, & partant $x - a = 0$, $x - b = 0$, $x - c = 0$, $x - d = 0$, $x - e = 0$, les Equations ſimples qui compoſent l'Equation dont les racines ſont ces quantités. En multipliant toutes ces Equations les unes par les autres, on aura

$$\begin{array}{llllll}
x^5 - ax^4 & + abx^3 & - abcx^2 & + abcdx & - abcde & = 0 \\
 - b & + ac & - abd & + abce & & \\
 - c & + ad & - abe & + abde & & \\
 - d & + ae & - acd & + acde & & \\
 - e & + bc & - ace & + bcde & & \\
 & + bd & - ade & & & \\
 & + be & - bcd & & & \\
 & + cd & - bce & & & \\
 & + ce & - bde & & & \\
 & + de & - cde & & &
\end{array}$$

pour l'Equation dans laquelle x peut avoir à la fois les valeurs données a, b, c, d, e.

III.

Propriété des Equations de tous les dégrés.

Il eſt aiſé de tirer de cette Equation, ces remarques générales ſur les Equations de tous les dégrés

1° Que le premier terme n'eſt autre choſe

que l'inconnue élevée à la puiſſance exprimée par le nombre des racines ſans coefficient.

Que le ſecond terme contient l'inconnue élevée à une puiſſance de moins avec un coefficient égal à la ſomme des racines.

Que dans le troiſiéme, l'inconnue ſe trouve élevée à deux puiſſances de moins, & a pour coefficient la ſomme de tous les produits deux à deux qu'on peut faire de toutes les racines.

Que dans le quatriéme on aura de même l'inconnue élevée à trois puiſſances de moins avec un coefficient qui exprime la ſomme des produits de toutes les racines priſes trois à trois.

Il ſera ainſi des autres termes juſqu'au dernier qui n'aura aucune puiſſance de x, mais qui ſera le produit de toutes les racines les unes par les autres. Ces remarques ont ſervi de baſe en beaucoup de rencontres, ſoit pour trouver les racines des Equations propoſées, ſoit du moins pour connoître pluſieurs de leurs propriétés.

IV.

Dans une Equation ſans ſecond terme la ſomme des racines poſitives eſt égale à celle des négatives.

On a tiré, par exemple, de ces remarques qu'une Equation comme $x^5 - 3x^3 + 4x^2 + 7x - 3 = 0$ manquant de ſecond terme, doit avoir néceſſairement des racines poſitives & des négatives, de plus que la ſomme des unes doit être égale à la ſomme des autres, car ſans cette condition elles ne ſe ſeroient pas détruites pour faire évanouir le ſecond terme. Ainſi dans une Equation du troiſiéme dégré, où le ſecond terme manquera, il y aura toujours ou une racine négative égale aux deux poſiti-

ves, ou une racine positive égale aux deux négatives.

V.

On a tiré encore des mêmes remarques que lorsqu'une Equation n'aura pas de dernier terme, il faudra qu'il y ait au moins une racine égale à zero ; ce qu'on auroit pû reconnoître aussi en faisant attention qu'une Equation telle que $x^3 + 5x^2 + 3x = 0$ qui manque de terme connu peut toujours se diviser par $x = 0$.

Une Equation qui n'a point de terme connu a au moins une racine égale à zero.

V I.

Lorsqu'on voudra retrouver dans une Equation les propriétés qu'on vient d'énoncer, on voit bien qu'il faudra que tous les termes de cette Equation soient du même côté, qu'ils soient ordonnés par rapport à l'inconnue, & que cette inconnue n'ait d'autre coefficient que l'unité au premier terme. De plus, que si quelqu'une des puissances de x manque dans l'Equation, il faudra toujours prendre pour quantiéme des autres termes ceux qu'ils auroient si ces puissances ne manquoient pas ; par exemple dans l'Equation $x^5 - 3x^3 + 4x - 5 = 0$ le terme $3x^3$ n'est que le troisiéme, parce que le second manque ; & le terme $4x$ est le cinquiéme, parce que le quatriéme manque. Si on vouloit donc appliquer les remarques précédentes à une telle Equation, on diroit que la somme de ses cinq racines est nulle, c'est-à-dire qu'elle a nécessairement des racines négatives & des racines positives, & que la somme des premieres est égale à la somme des au-

Conditions qu'il faut observer dans une Equation pour y trouver les propriétés précédentes.

tres. On diroit encore que la ſomme des produits de toutes les racines deux à deux eſt égale à -3; que la ſomme de tous les produits trois à trois eſt o, que la ſomme de tous les produits quatre à quatre eſt $+4$, qu'enfin le produit de toutes les racines eſt -5.

VII.

Méthode pour avoir les racines commenſurables d'une Equation.

De la propriété qu'a le dernier terme d'une Equation d'être égal au produit de toutes les racines, on peut tirer une méthode d'avoir toutes les racines qui ſont commenſurables dans une Equation, car elles doivent toutes ſe trouver en tentant la diviſion de l'Equation par x plus ou moins chacun des diviſeurs du dernier terme.

X

Descartes

Par exemple, qu'on ait l'Equation $x^3 - 5xx + 7x - 3 = 0$, les diviſeurs du terme -3, ne pouvant être que $-1, -3, +1, +3$; je tente la diviſion par $x - 1$, $x - 3$, $x + 1$, $x + 3$; elle réuſſit par $x - 1$ & par $x - 3$, & je vois que l'Equation auroit pû s'écrire ainſi $\overline{x - 1} \times \overline{x - 1} \times \overline{x - 3} = 0$, qui m'apprend que l'Equation propoſée a trois racines, dont l'une eſt $+3$ & les autres toutes deux égales ſont chacune $+1$.

Lorſqu'une Equation ne pourra pas ſe diviſer par aucune Equation ſimple compoſée de $x +$ ou $-$ quelqu'un des diviſeurs du dernier terme, on ſera ſûr que cette Equation n'aura aucune racine commenſurable.

VIII.

Il ſe préſente contre cette méthode de trou-

ver les racines commenſurables, une difficulté qui, au premier coup d'œil, paroît aſſez conſiderable, c'eſt que ſi quelque racine de cette Equation étoit une fraction, on ne ſçauroit pas comment la trouver parmi les diviſeurs du dernier terme, parce qu'en admettant des diviſeurs fractionnaires dans un nombre, on en peut trouver à l'infini. Mais il eſt aiſé de répondre à cette difficulté en faiſant remarquer que tous les coefficiens d'une Equation étant des nombres entiers, il eſt impoſſible que l'inconnue ait pour valeur une fraction. Je crois que ceux qui poſſedent un peu l'Arithmétique des fractions reconnoîtroient ſans ſecours la vérité de cette propoſition; mais pour leur faciliter les moyens de s'en aſſurer, prenons pour exemple une Equation comme $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, dans laquelle a, b, c, ſont ſuppoſés des nombres entiers. Il eſt évident que x étant une fraction, x^3, x^2, en ſeront auſſi, & que jamais la fraction qui exprime x^3 ne pourra ſe réduire à une qui ait le même dénominateur que x^2 ou ſon multiple ax^2. A plus forte raiſon la même fraction ne pourra pas non plus ſe réduire au même dénominateur que x ou ſon multiple bx, donc $x^3 + ax^2 + bx$ ne pourra jamais faire une fraction plus ſimple que x^3 qui eſt irréductible. Donc x ne peut jamais être une fraction dans de telles Equations.

Dans une Equation dont tous les coefficiens ſont des entiers, l'inconnue ne ſçauroit être une fraction.

IX.

Lorſqu'on aura une Equation dont les coefficiens ſeront des fractions, on ne pourra pas en la laiſſant avec ſes fractions trouver par la

méthode précédente les racines commensurables qu'elle pourroit avoir; mais on pourra toujours par une transformation assez simple changer le Problême en un autre, où l'Equation à résoudre n'aura plus de fractions, sans donner de coefficient au premier terme.

Transformation par laquelle on fait évanouir les fractions d'une Equation quelconque.

Soit, par exemple l'Equation $x^3 + \frac{a}{b} x^2 + \frac{c}{d} x + \frac{e}{f} = 0$ (on verra aisément qu'une d'un dégré plus élevé n'auroit pas plus de difficulté) en faisant l'inconnue x égale à une autre inconnue y divisée par quelque nombre indéterminé m, je change l'Equation en une nouvelle $\frac{y^3}{m^3} + \frac{ay^2}{bm^2} + \frac{cy}{dm} + \frac{e}{f} = 0$ ou $y^3 + \frac{am}{b} y^2 + \frac{cm^2}{d} y + \frac{em^3}{f} = 0$, dans laquelle je vois que si m est divisible à la fois par b, par d, & par f; $\frac{am}{b}$, $\frac{cm^2}{d}$ & $\frac{em^3}{f}$ seront des nombres entiers. Or le Problême est réduit par-là à quelque chose de bien aisé, car le pis aller est de prendre pour m le produit des nombres b, d, f, & si ces nombres ne sont pas premiers * entr'eux, on trouvera aisément un nombre plus petit que leur produit qui sera divisible par tous les trois.

* On appelle en Arithmétique nombres premiers ceux qui n'ont point de diviseurs, tels que 5, 11, 31, &c. & on dit que deux nombres sont premiers entre eux lorsqu'ils n'ont aucun commun diviseur, tels sont 21 & 16, 18 & 35.

X.

L'Equation étant changée en une autre ſans fraction, on cherchera les racines commenſurables de cette derniere par la méthode précedente, & ſi elle n'en a pas, on ſera ſur que la premiere n'en avoit pas non plus, puiſque x étant commenſurable ne pourra jamais donner une quantité incommenſurable en le diviſant par le nombre m qui eſt commenſurable auſſi.

Par cette transformation la méthode précédente s'applique aux Equations fractionnaires.

XI.

La méthode précédente a cet inconvenient conſidérable que lorſqu'il arrive que le dernier terme a beaucoup de diviſeurs, les calculs qu'il faut faire pour tenter toutes les diviſions que cette méthode preſcrit ſont ſi longs, qu'on l'abandonneroit malgré l'avantage infini de s'étendre généralement aux Equations de tous les dégrés dont une ou pluſieurs racines ſont commenſurables. C'eſt ce qui a engagé les plus habiles Analyſtes à perfectionner cette méthode en trouvant des moyens plus faciles que la diviſion pour reconnoître les diviſeurs qui ne doivent pas réuſſir. Voici comment on s'y eſt pris.

Inconvenient de la méthode précédente.

XII.

On a d'abord remarqué que ſi on faiſoit dans la racine $x + a$ d'une Equation quelconque, ou ce qui revient au même dans le diviſeur $x + a$ d'une quantité quelconque, x égal à un nombre donné, le nombre dans lequel ſe changeoit alors la racine devoit être un diviſeur de la quantité propoſée, dans laquelle on au-

Réfléxions qui ont ſervi à perfectionner cette méthode.

Newton?

roit fait x égal au même nombre : c'eſt-à-dire, par exemple que ſi on a la quantité $x^3 - 2x - 21$ dont ont ſçait que $x - 3$ eſt un diviſeur, il arrivera qu'en faiſant $x = 5$ le nombre 94 que devient $x^3 - 2x - 21$ par cette ſuppoſition eſt néceſſairement diviſible par le nombre 2 que devient $x - 3$ par la même ſuppoſition.

En partant de-là on a ſuppoſé dans la quantité dont on cherchoit un diviſeur, x ſucceſſivement égal à pluſieurs nombres, tels par exemple que $+1$, 0, -1 ; on a commencé par ces ſuppoſitions, parce qu'elles donnent les ſubſtitutions les plus faciles. Enſuite on a cherché tous les diviſeurs des nombres dans leſquels la quantité propoſée ſe change par ces ſubſtitutions ; & on a fait ces remarques qui ſe préſentoient naturellement après la premiere.

1° Que parmi tous les diviſeurs du nombre venu par la ſuppoſition de $x = +1$ dans la quantité, on devoit trouver le nombre $1 + a$, puiſque $x + a$ étoit le diviſeur cherché.

2°. Que parmi tous les diviſeurs venus par la ſuppoſition de $x = 0$, qui ne ſont autre choſe que les diviſeurs du dernier terme de la quantité propoſée, devoit être le nombre a.

3°. Que parmi tous les diviſeurs du nombre venu par la ſuppoſition de $x = -1$, devoit être le nombre $-1 + a$.

XIII.

Principe fondamental pour trouver les racines commenſurables.

Or comme les nombres $1 + a$, a, $-1 + a$ ſont néceſſairement tels que le premier ſurpaſſe le ſecond d'une unité, & que le ſecond ſurpaſſe le troiſiéme

Newton?

troisiéme d'une unité auſſi, il étoit aiſé de tirer de-là ce principe, que de tous les diviſeurs du nombre venu par la ſuppoſition de $x=0$, aucun ne pouvoit être le nombre demandé a, s'il ne ſe trouvoit en même-tems ſurpaſſé de l'unité par quelqu'un des diviſeurs du nombre venu par la ſuppoſition de $x=1$, & s'il ne ſurpaſſoit en même tems d'une unité quelqu'un des diviſeurs du nombre qu'a donné la ſuppoſition de $x=-1$. On voit bien qu'un tel principe doit faire éviter beaucoup de diviſions inutiles dans la recherche des racines commenſurables.

Si on trouve pluſieurs nombres, parmi les diviſeurs du nombre venu par la ſuppoſition de $x=0$, qui ayent les conditions qu'on vient de remarquer, on fera enſuite $x=2$, & on verra ſi parmi les diviſeurs des nombres qui viennent alors, on trouve des nombres qui ſurpaſſent d'une unité ceux qu'a donné la ſuppoſition de $x=1$, & ainſi de ſuite.

Au reſte, on voit bien que l'examen qu'on fait de tous ces diviſeurs doit être double, c'eſt-à-dire que chacun d'eux doit être pris auſſi-bien en $-$ qu'en $+$.

XIV.

Pour éclaircir cette méthode & pour en faciliter l'uſage, nous allons en donner quelques exemples en faiſant voir l'ordre qu'il faut garder dans le calcul pour ne s'y point tromper, & pour abreger, autant qu'il eſt poſſible, la peine du Calculateur.

Application de la méthode précédente à un exemple.

Soit l'Equation $x^3 - 2x^2 - 13x + 6 = 0$ dont il s'agit de trouver les racines commensurables, ou ce qui revient au même, soit la quantité $x^3 - 2x^2 - 13x + 6$ dont on demande les diviseurs d'une dimension.

Je commence par écrire (voyez la Table cy-jointe Case 1) l'une sous l'autre les suppositions 1, 0, -1 que je veux faire pour x; j'écris ensuite à côté de chacun de ces nombres les nombres $-8, +6, +16$ ou simplement 8, 6, 16 (à cause que les signes sont indifférens pour les diviseurs) dans lesquels se change successivement la quantité $x^3 - 2x^2 - 13x + 6$ par ces suppositions, & je les sépare des premiers nombres par une barre verticale. J'écris dans une troisiéme colonne les nombres 1, 2, 4, 8; 1, 2, 3, 6; 1, 2, 4, 8, 16 qui sont les diviseurs des nombres précédens; les quatre premiers à côté de 8 dont ils sont les diviseurs, les quatre seconds à côté de 6, & les cinq derniers à côté de 16.

Cela posé, pour trouver parmi les diviseurs 1, 2, 3, 6 du nombre 6 venu par la supposition de $x = 0$, celui qu'il faut ajouter ou retrancher à x pour avoir le diviseur cherché, ou plûtôt pour exclure de tous ces diviseurs ceux qui n'ont pas les conditions requises; je commence par remarquer que 1 qui est le premier de ces diviseurs ne sçauroit être admis, soit qu'on le prenne en $+$, soit qu'on le prenne en $-$, car si on le prend en $+$, c'est-à-dire si on regarde $x + 1$ comme le diviseur cherché, 2 seroit ce que deviendroit ce diviseur par la supposition de $x = +1$,

& o ce qu'il deviendroit par la ſuppoſition de $x = -1$, & par conſéquent il faudroit trouver à la fois 2 dans les nombres de la premiere bande, & o dans ceux de la troiſiéme, or la ſeconde de ces conditions n'eſt pas remplie. Quant à ce que -1 ne convient pas non plus, c'eſt-à-dire que $x - 1$ n'eſt pas le diviſeur cherché, cela ſe tire de ce que ce diviſeur devenant o par la ſuppoſition de $x = +1$ & -2 par la ſuppoſition de $x = -1$, il faudroit par conſéquent trouver o dans les nombres de la premiere bande, & le nombre 2 dans ceux de la ſeconde. Or il n'y a que la ſeconde de ces deux conditions qui ait lieu. Je vois enſuite que le diviſeur 2 eſt auſſi dans le cas d'être rejetté, parce que ſi on le prend en $+$, c'eſt-à-dire ſi on regarde $x + 2$ comme le diviſeur cherché, on auroit $+3$ par la ſuppoſition de $x = 1$, & $+1$ par la ſuppoſition de $x = -1$, ce qui demanderoit qu'on trouvât les nombres 3 dans la premiere bande, & 1 dans la troiſiéme; or la premiere de ces deux conditions ne ſe trouve pas remplie. Et ſi l'on prenoit 2 en $-$, c'eſt-a-dire qu'on voulût que $x - 2$ fut le diviſeur, on auroit alors -1 & -3 pour les ſuppoſitions de $x = +1$ & de $x = -1$, ce qui demanderoit de trouver à la fois 1 dans la premiere bande, & 3 dans la troiſiéme, conditions dont il n'y a que la premiere qui ait lieu.

Ayant exclu 1 & 2, je prens le diviſeur 3, & je vois qu'en le prenant en $+$, c'eſt-à-dire en regardant $x + 3$ comme le diviſeur cherché,

il faudra trouver $+4$ par la ſuppoſition de $x = +1$, & $+2$ par la ſuppoſition de $x = -1$. Or je trouve effectivement 4 dans la premiere bande, & 2 dans la troiſiéme. Donc $+3$ a les conditions requiſes, je l'écris alors à la ſeconde bande, c'eſt-à-dire vis-à-vis le nombre dont il eſt diviſeur, & j'écris en même-tems les nombres $+4$ & $+2$ dans les bandes ſupérieures & inférieures; non que ces nombres ſoient à joindre à x pour ſervir de diviſeurs à la quantité propoſée, mais parce que n'ayant pas encore achevé l'examen des diviſeurs, il ſe pourroit trouver encore d'autres nombres que $+3$ qui auroient les conditions requiſes; & qu'il faudroit alors faire de nouvelles ſuppoſitions pour reconnoître entre ces nombres ceux qu'il faudroit encore exclure. J'examine maintenant ſi 3 pris en $-$ ne pourroit pas réuſſir auſſi-bien qu'en $+$, c'eſt-à-dire ſi $x - 3$ ne pourroit pas avoir les mêmes conditions pour être diviſeur de la propoſée, il faudroit pour cela trouver -2 & -4 par les ſuppoſitions de $x = +1$ & de $x = -1$, or ces nombres ſe trouvent effectivement; donc juſqu'à préſent $x - 3$ a auſſi-bien les conditions néceſſaires pour être diviſeur que $x + 3$ j'écris par conſéquent dans une cinquiéme colonne verticale $-2, -3, -4$.

Je paſſe enfin à l'examen de 6 & je vois que ſi je le prends en $+$, il faudroit trouver $+7$ & $+5$ dans les bandes ſupérieures & inférieures, ce qui n'arrive pas, & que ſi je le prends en $-$ je devrois avoir -5 & -7 dans les mêmes

bandes, ce qui ne ſe trouve pas non plus. Je conclus donc qu'il n'y a que $x - 3$ & $x + 3$ qui puiſſent être des diviſeurs commenſurables & d'une dimenſion de la propoſée.

Pour ſçavoir ſi l'on eſt autant fondé à tenter la diviſion par $x - 3$ que par $x + 3$; je remarque que ſi on faiſoit une quatriéme bande en ſuppoſant $x = -2$ on devroit trouver -5 pour le quatriéme terme de la colonne $-2, -3, -4$; & $+1$ pour le quatriéme terme de la colonne $+4, +3, +2$, car il eſt clair que le diviſeur $x - 3$ deviendroit -5 par la ſuppoſition de $x = -2$, & que le diviſeur $x + 3$ deviendront $+1$ par la même ſuppoſition. Mais en faiſant $x = -2$ dans la propoſée $x^3 - 2x^2 - 13x + 6$, elle devient 16 qui n'eſt pas diviſible par 5 & qui l'eſt par 1. Donc $x - 3$ ne ſçauroit être un diviſeur de cette quantité, donc s'il y en a un, il ne peut être que $x + 3$, ou ce qui revient au même ſi $x^3 - 2x^2 - 13x + 6$ a une racine comenſurable, elle ne peut être que -3. Pour ſçavoir ſi elle l'a effectivement, je diviſe $x^3 - 2x^2 - 13x + 6$ par $x + 3$, ce qui réuſſit & donne pour quotient exact $xx - 5x + 2$.

XV.

Pour que l'uniformité ſervit à la clarté dans cet exemple, j'ai examiné parmi les diviſeurs 1, 2, 3, 6 du nombre 6 venu par la ſuppoſition de $x = 0$ le nombre 1 comme les autres, mais on peut toujours ſe diſpenſer de faire aucun examen pour ce nombre, parce que s'il avoit à réuſſir, ſoit en $+$, ſoit en $-$, on l'auroit

appris déja en ſubſtituant $+1$ & -1 à la place de x dans l'Equation donnée.

Dans des nombres auſſi ſimples que 8, 6, 16 il étoit aiſé de ne pas oublier aucun de leurs diviſeurs, parce que ces nombres en ont peu. Mais lorſque l'on a des nombres qui ont beaucoup de diviſeurs, il faut les chercher avec un certain ordre pour les avoir tous. Un ſeul exemple ſuffira pour faire voir comment cette opération doit ſe faire.

XVI.

Maniere d'avoir tous les diviſeurs d'un nombre.

Soit propoſé de chercher tous les diviſeurs du nombre 120. Je commence par tracer une barre verticale (voyez la Caſe 2 Table ſuivante) à gauche de ce nombre, puis je mets à gauche de cette barre à la hauteur de 120, l'unité comme étant ſon premier diviſeur. J'eſſaye enſuite de diviſer 120 par 2, comme la diviſion réuſſit j'écris 2, & je le mets à gauche de la barre à la même hauteur que 60 quotient de la diviſion que je mets à droite de la même barre.

J'eſſaye encore la diviſion par 2 qui réuſſit, & donne 30 pour quotient, je mets alors le nouveau diviſeur 2 ſous le premier; & 30 ſous 60. Je multiplie en même-tems le nouveau diviſeur 2 par celui d'en haut 2, & je mets le produit 4 à gauche du ſecond 2, comme étant un nouveau diviſeur du nombre propoſé 120. La raiſon de cette multiplication eſt que ſi 120 eſt diviſible par 2 & ſa moitié par 2, il doit l'être néceſſairement par 4.

Comme 30 peut ſe diviſer par 2 j'écris en-

core 2 à gauche de la barre & à la quatriéme ligne, & le quotient 15 à droite à la même ligne. Je multiplie en même-tems le nouveau diviſeur 2 par 4, ce qui me donne 8 pour un nouveau diviſeur du nombre propoſé. Je ne multiplie pas ce nouveau 2 par les premiers, parce qu'il m'en viendroit 4 qui eſt déja écrit.

15 ne pouvant pas ſe diviſer par 2 j'eſſaye de le diviſer par 3, ce qui me réuſſit & me donne 5 pour quotient que j'écris à droite dans la cinquiéme ligne auſſi bien que le diviſeur 3 que j'écris à gauche; je multiplie enſuite 3 par 2, par 4 & par 8 que je trouve dans les bandes ſupérieures, & j'écris à gauche du 3 les produits 6, 12, 24, qui ſont, comme il eſt évident, des nouveaux diviſeurs du nombre propoſé.

5 n'ayant plus d'autre diviſeur que lui-même, je l'écris à gauche de la barre dans la cinquiéme ligne, & je mets en même-tems le produit de ce nombre par tous les diviſeurs précédens 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24, & j'ai 10, 15, 20, 30, 40, 60, 120 que j'écris dans la même ligne à gauche de 5.

Cela fait, tous les nombres qui ſont à gauche de la barre, à compter depuis 1 juſqu'à 120 ſont tous les diviſeurs de 120. Il en ſeroit ainſi des autres nombres dont ont chercheroit tous les diviſeurs.

XVII.

Soit propoſé préſentement de chercher les racines commenſurables de l'Equation

Autre exemple de la méthode de trouver les racines commenſurables.

$$x^5 - 12x^4 + 5x^3 - 61x^2 + 22x - 120 = 0.$$

Ayant écrit dans une premiere colonne verticale 1, 0, — 1 (Table suivante Case 3) pour les valeurs à donner successivement à x; & dans une autre colonne verticale les nombres 165, 120, 221 qu'on trouve par la substitution de ces valeurs dans la quantité

$x^5 - 12x^4 + 5x^3 - 61x^2 + 22x - 120$,

je place dans une troisiéme colonne les diviseurs de ces trois nombres, ce qui me donne les trois bandes

1, 3, 5, 11, 15, 33, 55, 165;
1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 20, 30, 40, 60, 120;
1, 13, 17, 221

que je place chacune vis-à-vis du nombre qui l'a produite cela fait parmi les diviseurs de 120, J'examine en premier lieu si le nombre 2 a les conditions requises, & je vois qu'en le prenant en + il s'accorde avec les nombres 3 & 1 pris en haut & en bas. J'ecris donc dans la quatriéme colonne verticale +3, +2, +1.

Je vois ensuite que le même nombre pris en — ne réussit pas, parce qu'il faudroit alors —3 en bas, ce qui ne se trouve pas.

Parcourant ensuite de la même maniere tous les autres diviseurs de 120, je trouve encore le nombre 12 qui étant pris en — a les conditions requises, pourvû qu'on prenne en — les nombres 11 & 13 qui sont au-dessus & au-dessous. J'écris donc dans une cinquiéme colonne verticale les trois nombres — 11, — 12, — 13.

Pour sçavoir présentement à laquelle des deux dernieres colonnes je dois m'arrêter, ou

plûtôt, par laquelle des deux quantités $x+2$ ou $x-12$ je dois tenter la division, je remarque que si c'étoit la premiere, il faudroit trouver zero en substituant -2 pour x dans l'Equation, ce qui n'arrive pas; donc il n'y a que la division par $x-12$ à tenter, je la tente & elle réussit en me donnant pour quotient x^4+5x^2-x+10. Ainsi $+12$ est une des valeurs de x dans l'Equation donnée & la seule commensurable.

XVIII.

Soit enfin $x^6-4x^5+3x^4-12x^3-5x^2+11x+36$. Ayant écrit (Case 4 Table suivante) dans une premiere colonne verticale les valeurs $1, 0, -1$ à donner à x; dans une seconde les nombres 30, 36, 40, dans lesquels la quantité proposée se change par ces suppositions, & dans une troisiéme tous les diviseurs 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30 du nombre 30, les diviseurs 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36 du nombre 36, les diviseurs 1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 40 du nombre 40; je trouve parmi tous ces diviseurs quatre colonnes à écrire qui renferment les conditions requises, la premiere, $+3, +2, +1$, la seconde, $-2, -3, -4$, la troisiéme, $-3, -4, -5$, la quatriéme, $+10, +9, +8$.

Troisiéme application de la méthode de trouver les racines commensurables.

Pour décider alors entre ces quatre colonnes, je commence par faire $x=2$, & j'écris 2 au-dessus de 1 dans la premiere colonne, j'écris ensuite dans la seconde colonne 74, nombre dans lequel la quantité proposée se change par la supposition de $x=2$. Cela fait,

je vois ſans me donner la peine de chercher les diviſeurs de ce nombre que les deux colonnes $+3$, $+2$, $+1$, & $+10$, $+9$, $+8$, ſont à rejetter, car ſi la premiere avoit lieu, il faudroit trouver $+4$ parmi les diviſeurs de 74, ce qui n'arrive pas, & ſi c'étoit la ſeconde, il faudroit trouver $+11$ parmi les mêmes diviſeurs, ce qui n'arrive pas non plus.

Je vois au contraire, que les nombres -1 & -2 que demandent les colonnes -2, -3, -4, & -3, -4, -5 ſont des diviſeurs de 74, j'écris donc les nombres -1 & -2 au-deſſus de -2 & de -3 dans la ſeconde & la troiſiéme colonne, & je cherche enſuite à exclure encore une de ces deux colonnes -1, -2, -3, -4, & -2, -3, -4, -5, ce qui devient bien facile, puiſque ſi la premiere étoit à conſerver, il faudroit trouver o par la ſuppoſition de $x=3$, ce qui n'arrive pas; au lieu que -1 qui, par la colonne -2, -3, -4, -5 doit être un diviſeur du nombre donné par la ſuppoſition de $x=3$, ne peut pas manquer de l'être. Donc il n'y a de colonne à eſſayer que -1, -2, -3, -4, -5, c'eſt-à-dire qu'il n'y a de diviſeur à tenter que $x-4$. J'eſſaye en effet la diviſion de la quantité propoſée par $x-4$, ce qui réuſſit & donne pour quotient x^5+3x^3-5x-9. Ainſi $+4$ eſt une des deux valeurs de x dans l'Equation propoſée & la ſeule commenſurable.

XIX.

Après avoir vû comment on pouvoit tirer des Equations d'un dégré quelconque, les

Equations commenſurables du premier qui en étoient les racines, il étoit naturel de chercher auſſi à en tirer les Equations du ſecond dégré qu'elles pouvoient renfermer : on devoit s'en promettre une auſſi grande utilité, la ſolution des Equations du ſecond dégré étant auſſi complette que celle du premier.

Méthode pour trouver les Equations du ſecond dégré commenſurables dans une Equation donnée.

Voici la méthode qu'on a imaginée pour y parvenir. Que $xx + bx + c = 0$ repréſente l'Equation du ſecond dégré qui peut être un des produiſans d'une Equation donnée, ou ce qui revient au même que $xx + bx + c$, ſoit le diviſeur cherché d'une quantité donnée; en faiſant $x = 0$ dans ce diviſeur, il eſt clair qu'il ſe réduira au nombre c, & que ce nombre ſera un des diviſeurs du dernier terme de la quantité donnée.

Si on fait enſuite $x = +1$ dans le diviſeur $x^2 + bx + c$, il ſe changera en $1 + b + c$ qui ſera un des diviſeurs du nombre que l'on a en faiſant de même dans la propoſée $x = 1$. Donc ſi on cherche tous les diviſeurs de ce nombre & qu'après les avoir pris tant en $+$ qu'en $-$, on en retranche l'unité ce ſera parmi tous les nombres, tant poſitifs que négatifs, que l'on aura par cette opération que devra ſe trouver le nombre égal à $b + c$.

Si on fait enſuite $x = -1$ tant dans la quantité propoſée, que dans le diviſeur $xx + bx + c$ qui devient alors $1 - b + c$, on voit qu'en cherchant tous les diviſeurs du nombre que devient la quantité par cette ſuppoſition, & re-

tranchant l'unité de tous ces diviſeurs, pris tant en — qu'en +, on aura parmi tous les nombres que ce calcul donnera celui qui exprime $-b+c$.

Or comme c eſt moyen arithmétique entre $b+c$ & $-b+c$, il s'enſuit que parmi les trois ſuites de nombres qu'on aura pour repréſenter $b+c$, c, $-b+c$, il ne faudra s'arrêter qu'à ceux qui ſeront en progreſſion arithmétique. Lorſqu'on aura trouvé trois nombres en progreſſion arithmétique, il eſt clair que celui qui répondra à la ſuppoſition de $x=0$ ſera celui qu'il faudra prendre pour c, & comme celui qui répondra à la ſuppoſition de $x=1$ repréſentera $b+c$, en retranchant le premier du ſecond, on aura b. Subſtituant enſuite ces deux nombres à la place de b & de c dans x^2+bx+c, on aura un diviſeur à tenter pour la quantité donnée, & le ſeul à eſſayer ſi on n'a trouvé qu'une progreſſion arithmétique parmi toutes les ſuites de nombres qu'ont donné les diviſeurs de la quantité où l'on a fait ſucceſſivement $x=1, 0, -1$. Si on a trouvé pluſieurs progreſſions arithmétiques, on ſe déterminera entre ces progreſſions à peu près comme dans le cas des diviſeurs ſimples, en faiſant de nouvelles ſuppoſitions pour x, comme -2, -3, ou $+2$, $+3$, &c.

Car qu'on ſuppoſe, par exemple $x=-2$, $x=-3$, &c. dans la quantité propoſée, il eſt clair que tous les diviſeurs, tant poſitifs que négatifs du nombre que l'on aura alors repréſenteront la quantité $4-2b+c$, $9-3b+c$, &c.

que devient x^2+bx+c lorſque $x=-2$ ou $x=-3$, &c. & que par conſéquent tous ces mêmes diviſeurs dont on aura retranché 4, 9, &c. repréſenteront $-2b+c$, $-3b+c$, &c. Or $-2b+c$, $-3b+c$, &c. étant d'autres termes de la progreſſion arithmétique $b+c$, c, $-b+c$, on n'aura donc plus qu'à chercher parmi les progreſſions arithmétiques trouvées précédemment celle qui ſe conſerve par ces nouvelles valeurs de x, & s'en ſervir comme on vient de l'expliquer pour déterminer les nombres b & c.

XX.

Soit par exemple la quantité $x^5+3x^4+2x^3+8x^2-36x+21$, dont on cherche un diviſeur de deux dimenſions.

Application de la méthode précédente.

Je commence par écrire dans une colonne verticale (Table ſuivante Caſe 5) les valeurs 1, 0, −1 que je veux donner à x. J'écris enſuite dans une nouvelle colonne verticale les nombres 1, 21, 65, dans leſquels la quantité propoſée ſe change par ces ſuppoſitions.

J'écris de même dans une troiſiéme colonne, à côté du premier nombre, ſon unique diviſeur 1; à côté de 21, ſes diviſeurs 1, 3, 7, 21; & à côté de 65 ſes diviſeurs 1, 5, 13, 65.

Cela fait, j'écris dans une quatriéme colonne les nombres 1, 0, 1 quarrés de 1, 0, −1 écrits dans la premiere colonne & valeurs de xx, par conſéquent, dans les mêmes ſuppoſitions de 1, 0, −1. Enfin je forme une cinquiéme colonne par ces conditions,

1°. Que la premiere bande —2, o se forme en retranchant 1 de 1 pris en — & de 1 pris en +.

2°. Que la seconde bande soit composée des nombres —21, —7, —3, —1, +1, +7, +21, les mêmes que les diviseurs qui sont à côté, mais écrits deux fois, l'une pour le signe —, l'autre pour le signe +.

3°. Que les nombres de la troisiéme bande soient — 66, — 14, —6, — 2, o, +4, +12, +64, dont les premiers — 66, —14, —6, — 2 soient trouvés en retranchant 1 des nombres 65, 13, 5, 1 pris en —, & les autres o, +4, +12, +64 en retranchant 1 des mêmes nombres 1, 5, 13, 65 pris en +.

Pour déterminer ensuite les progressions arithmétiques qui sont dans ces trois suites de nombres, je commence par prendre dans la premiere bande le nombre —2 pour le premier terme d'une progression, & je prends successivement pour seconds tous ceux de la seconde bande; je cherche en même-tems les troisiémes termes que ces premiers donneroient, & j'examine quels sont ceux de ces troisiémes qui se trouvent dans la troisiéme bande; or —2 & —21 doivent donner pour troisiéme terme —40 qui n'est point dans la troisiéme bande, je rejette donc 21, je prends alors —7 pour second terme, & comme il devroit donner —12 pour troisiéme terme, & que — 12 n'est pas dans la troisiéme bande, je rejette encore — 7, & de même — 3, parce que ce dernier devroit donner —4 qui ne se trouve pas non plus.

A l'égard de -1 comme il donne o pour troisiéme, & que o se trouve dans la troisiéme bande, j'écris dans la sixiéme colonne la progression -2, -1, 0. De même $+1$ pris pour second donnant $+4$ qui se trouve encore, j'écris la seconde progression -2, $+1$, $+4$. Et comme $+7$ & $+21$ devroient donner chacun un troisiéme terme qui n'est pas dans la troisiéme bande, je les rejette. Les progressions qui peuvent commencer par 2 étant déterminées, je passe à celles dont le premier terme seroit o, & pour les trouver, je prends ainsi que j'ai fait pour 2 tous les nombres de la seconde bande l'un après l'autre.

Je vois d'abord que -21 devroit donner pour troisiéme terme -42 qui n'est pas dans la troisiéme bande. Je vois ensuite que -7 donne -14 qui se trouve, ainsi j'écris encore la progression 0, -7, -14. De même -3 & -1 donnant -6 & -2 qui se trouvent aussi, j'écris les progressions 0, -3, -6, & 0, -1, -2. A l'égard des nombres $+1$, $+7$, $+21$, ils ne donnent aucun troisiéme terme qui se trouve, ainsi je les rejette.

Pour voir présentement lesquelles de ces progressions il faut encore rejetter, je fais $x = -2$, & j'écris -2 dans la premiere colonne; en observant de mettre en même-tems, 1° dans la seconde colonne 125 que donne la quantité proposée par cette valeur de x. 2°. Dans la troisiéme les nombres 1, 5, 25,

125 diviſeurs de 125. 3°. Dans la quatriéme colonne le nombre 4 quarré de — 2 & valeur de xx dans cette ſuppoſition. 4°. Dans la cinquiéme colonne les nombres — 129, — 29, — 9, — 5 que l'on a en retranchant 4 des nombres 125, 25, 5, 1 pris en —, & les nombres — 3, + 1, + 21, + 121 que l'on a en retranchant 4 des mêmes nombres 1, 5, 25, 125 pris en +.

Par ce moyen, je vois que les deux progreſſions — 2, + 1, + 4, & 0, — 7, — 14 ſont à rejetter, parce qu'elles devroient donner pour quatriéme terme + 7 & — 21 qui ne ſe trouvent pas dans la quatriéme bande. Mais les trois progreſſions — 2, — 1, 0; 0, — 3, — 6; 0, — 1, — 2 devant donner pour quatriémes termes, + 1, — 9, — 3 qui ſe trouvent dans cette quatriéme bande, j'ai beſoin d'une nouvelle ſuppoſition pour exclure au moins une de ces trois progreſſions.

Je fais donc $x = -3$, ce qui me donne 147 pour le nombre dans lequel ſe change la quantité propoſée par cette ſuppoſition. J'écris donc 147 dans la ſeconde colonne, & à côté, dans la troiſiéme, ſes diviſeurs 1, 3, 7, 21, 49, 147, je mets de même dans la quatriéme colonne 9 quarré de — 3 ou valeur de xx dans la nouvelle ſuppoſition, enfin j'écris dans la cinquiéme colonne les nombres — 156, — 58, — 30, — 16, — 12, — 10, — 8, — 6, — 2, + 12, + 40, + 138, que l'on a en retranchant 9 des nombres 1, 3, 7, 21, 49, 147 pris en — & en +.

Par-là

Case 1.

$x^3 - 2x^2 - 13x + 6$

1	8	1. 2. 4. 8	+4	−2
0	6	1. 2. 3. 6	+3	−3
−1	16	1. 2. 4. 8. 16	+2	−4
−2	16		+1	

Case 2.

1	120
2	60
4. 2	30
8. 4. 2	15
24. 12. 6. 3	5
120.60. 40.30.20.15. 10. 5	1

Case 3.

$x^5 - 12x^4 + 5x^3 - 61x^2 + 22x - 120$

1	165	1.3.5.11.15.33.55.165	+3	−11
0	120	1.2.3.4.5.6.8.10.12.15.20.24.30.40.60.120	+2	−12
−1	221	1.13.17.221	+1	−13

Case 4.

$x^6 - 4x^5 + 3x^4 - 12x^3 - 5x^2 + 11x + 36$

					−1	
2	74			−1	−2	
1	30	1. 2. 3. 5. 6. 10. 15. 30	+3	−2	−3	+10
0	36	1. 2. 3. 4. 6. 9. 12. 18. 36	+2	−3	−4	+ 9
−1	40	1. 2. 4. 5. 8. 10. 20. 40	+1	−4	−5	+ 8

Case 5.

$x^5 + 3x^4 + 2x^3 + 8x^2 - 36x + 21$

1	1	1	1	−2, 0	−2	−2	0	0	0
0	21	1.3.7.21	0	−21, −7, −3, −1, +1, +3, +7, +21	−1	+1	−7	−3	−1
−1	65	1.5.13.65	1	−66, −14, −6, −2, 0, +4, +12, +64	0	+4	−14	−6	−2
−2	125	1.5.25.125	4	−129, −29, −9, −5, −3, +1, +21, +121	+1			−9	−3
−3	147	1.3.7.21.49.147	9	−156, −58, −30, −16, −12, −10, −8, −6, −2, +12, +40, +138				−12	

Par-là je trouve que les progreſſions -2, $-1, 0, +1$ & $0, -1, -2, -3$ doivent être rejettées, & qu'au contraire il faut conſerver la progreſſion $0, -3, -6, -9$, car les deux cinquiémes termes des premieres progreſſions doivent être $+2$ & -4 qui ne ſe trouvent pas dans la cinquiéme bande, au lieu que le cinquiéme terme de la progreſſion $0, -3, -6, -9$ eſt -12 qui s'y trouve.

Après avoir réduit toutes les progreſſions à la ſeule $0, -3, -6$, &c. je prends dans cette progreſſion le nombre -3 qui, dans la ſixiéme colonne, répond à la ſuppoſition de $x = 0$, pour exprimer le terme c du diviſeur cherché $xx + bx + c$. Je prends enſuite, toujours dans la ſixiéme colonne, 0 qui répond à la ſuppoſition de $x = 1$, & qui ſuivant les principes précédens doit être $b + c$, ainſi retranchant c ou -3 de 0 ou $b + c$, j'ai $+3$ pour b, & partant le diviſeur cherché $x^2 + bx + c$ eſt $xx + 3x - 3$, s'il y en a un de deux dimenſions.

Pour ſçavoir ce qui en eſt, je diviſe la quantité propoſée $x^5 + 3x^4 + 2x^3 + 8x^2 - 36x + 21$ par $xx + 3x - 3$, & je trouve qu'en effet la diviſion eſt exacte, & donne pour quotient $x^3 + 5x - 7$.

XXI.

Soit préſentement la quantité $x^4 + 6x^3 + 11x^2 + 10x + 5$, je commence par écrire (Table ci-jointe Caſe 1) dans une premiere colonne verticale les valeurs $2, 1, 0, -1$, — Autre application de la méthode précédente.

— 2 que je veux donner à x. J'écris enſuite dans la ſeconde colonne verticale les nombres 133, 33, 5, 1, 3 dans leſquels la quantité ſe change par ces ſuppoſitions.

Dans la troiſiéme j'écris vis-à-vis de ces nombres tous leurs diviſeurs. Dans la quatriéme les valeurs 4, 1, 0, 1, 4 de xx dans les ſuppoſitions faites pour x à la premiere colonne.

Enfin dans la cinquiéme colonne j'écris pour la premiere bande les nombres — 137, — 23, — 11, — 5, — 3, + 3, + 15, + 129 trouvés en retranchant 4 des nombres 133, 19, 7, 1 pris d'abord en — & enſuite en +. De même dans la ſeconde bande les nombres — 34, — 12, — 4, — 2, 0, + 2, + 10, + 32, produits en retranchant 1 des nombres 33, 11, 3, 1 pris d'abord en — puis en +, & ainſi des autres bandes. Tous ces nombres écrits, je commence par prendre dans la cinquiéme bande de la cinquiéme colonne, le premier nombre — 7 pour ſervir de premier terme d'une progreſſion, & prenant en même-tems — 2 dans la quatriéme bande pour ſervir de ſecond, je vois que le troiſiéme devroit être + 3, & qu'il ne ſe trouve pas dans la troiſiéme bande, ainſi je paſſe à 0 qui, en prenant toujours — 7 pour premier terme, donneroit + 7 pour troiſiéme terme, & comme + 7 n'eſt pas non plus dans la troiſiéme, je conclus qu'il n'y a point dans les nombres de la cinquiéme colonne de progreſſion qui puiſſe commencer par — 7.

Je prends donc — 5 pour premier terme,

& je vois qu'en lui donnant —2 pour ſecond, le troiſiéme ſeroit +1 qui ſe trouve bien dans la troiſiéme bande, mais qui donne pour quatriéme terme +4, qui n'eſt pas dans la ſeconde bande; ainſi je laiſſe —2 & prends o pour ſecond terme, ce qui me donne alors +5, +10, +15, pour troiſiéme, quatriéme & cinquiéme termes, & comme tous ces nombres ſe trouvent dans la troiſiéme, ſeconde & premiere bandes, j'écris dans la ſixiéme colonne les nombres 15, 10, 5, 0, —5.

Prenant enſuite —3 pour premier terme, je vois que ni —2 ni o ne peuvent lui ſervir de ſeconds termes, parce que le premier donneroit la progreſſion —3, —2, —1, 0, +1 dont le dernier terme n'eſt point dans la premiere bande; & que le ſecond donneroit la progreſſion —3, 0, +3, &c. qui manque dès le troiſiéme terme +3 qui ne ſe trouve point dans la troiſiéme bande.

Il ne me reſte plus qu'à prendre —1 pour premier terme, je lui donne d'abord —2 pour ſecond qui ne réuſſit pas, mais lui donnant enſuite o, j'ai pour troiſiéme, quatriéme, cinquiéme termes les nombres +1, +2, +3 qui ſont dans la troiſiéme, ſeconde & premiere bande; j'écris donc dans la ſixiéme colonne les nombres +3, +2, +1, 0, —1.

Cela fait, je ne cherche point à donner de nouvelles valeurs à x pour exclure une de ces deux progreſſions, parce que la quantité donnée étant de quatre dimenſions, doit ou n'avoir aucun diviſeur de deux dimenſions, ou

en avoir deux à la fois, ce qui ſe tire de ce qu'auſſi-tôt qu'on aura trouvé un diviſeur de deux dimenſions à une quantité qui a quatre dimenſions, le quotient qui eſt toujours un diviſeur en même-tems, aura auſſi deux dimenſions.

Suivant cette réfléxion, je prends indifferemment l'une ou l'autre des deux progreſſions précédentes, la premiere, par exemple, dans laquelle 5 étant ce qui répond à la ſuppoſition de $x = 0$, & 10 ce qui répond à la ſuppoſition de $x = 1$, j'ai $c = 5$ & $b + c = 10$, c'eſt-à-dire, $b = 5$. D'où le diviſeur que donne cette progreſſion eſt $xx + 5x + 5$. Je diviſe donc la quantité propoſée par $xx + 5x + 5$, & je vois qu'elle réuſſit en donnant pour quotient $xx + x + 1$ qui eſt le diviſeur qu'on trouveroit par l'autre progreſſion.

XXII.

Lorſqu'il ſera queſtion de trouver les diviſeurs d'une Equation telle que $6y^4 - y^3 - 21y^2 + 3y + 20 = 0$, dont le premier terme aura un coefficient qui n'aura pas pû s'en aller en diviſant toute l'Equation par ce coefficient, on pourra ſe ſervir des principes précédens ſans être obligé de changer cette Equation en une autre qui n'ait point de coefficient au premier terme comme on le pourroit faire par la méthode de l'art. IX.

Méthode pour trouver les diviſeurs d'une dimen-

Pour le faire voir examinons d'abord ce qui regarde les diviſeurs d'une dimenſion. Que $mx + a$ repréſente celui qui doit diviſer une

quantité quelconque donnée. Il eſt clair que ſi on fait x ſucceſſivement égal à 2, 1, 0, — 1, —2, &c, ce diviſeur deviendra dans tous ces cas $2m + a, m + a, a, - m + a, - 2m + a$, &c. qui ſont des quantités en progreſſion arithmétique, dans leſquelles il eſt aiſé de remarquer,

ſion, lorſque l'x doit avoir un coefficient.

1°. Que la différence m de tous les termes eſt le coefficient de x dans le diviſeur.

2°. Que cette même différence m eſt un diviſeur du coefficient du premier terme de la quantité propoſée.

3°. Que le terme a répondant à la ſuppoſition de $x = 0$ eſt la partie délivrée d'x du diviſeur.

4°. Que les mêmes quantités en progreſſion arithmétique ſeront des diviſeurs de la quantité donnée, dans laquelle on aura fait ſucceſſivement x égal à 2, 1, 0, — 1, — 2, &c.

Cela poſé, lorſqu'on aura à chercher les diviſeurs d'une dimenſion d'une quantité quelconque donnée, on ſuivra d'abord le même procédé que ci-deſſus pour les trois premieres colonnes; on cherchera enſuite parmi tous ces nombres quelque progreſſion, dont la différence ſoit un diviſeur du coefficient du premier terme de la quantité propoſée. Enfin, pour employer cette progreſſion, on ſubſtituera dans $mx + a$, à la place de a le terme de la progreſſion qui répondra à la ſuppoſition de $x = 0$, & à la place de m le nombre que l'on aura en retranchant un terme quelconque de la progreſſion, de celui qui eſt au-deſſus.

XXIII.

Application de cette méthode à un exemple.

Supposons, par exemple, que l'on cherche les diviseurs de la quantité $6x^4 - x^3 - 21x^2 + 3x + 20$.

Je range à l'ordinaire dans la premiere colonne les suppositions 2, 1, 0, —1, —2, à faire pour x. Dans la seconde les nombres 30, 7, 20, 3, 34, que devient successivement la quantité donnée par ces suppositions, & enfin dans la troisiéme tous les diviseurs de ces nombres.

Cela fait, afin de découvrir parmi tous les nombres de la troisiéme colonne quelque progression qui serve à reconnoître le diviseur cherché, Je commence par examiner le premier nombre 1 de la premiere bande; & je vois d'abord que si on lui donne pour second le premier nombre 1 de la seconde bande, la progression 1, 1, 1, &c. qui en vient ne peut pas être admise, puisqu'elle ne sçauroit représenter le diviseur cherché $mx + a$ qui doit varier nécessairement par les différentes valeurs de x. Je vois de même que 7 ne sçauroit être pris pour second, car le troisiéme terme que produiroit cette supposition seroit 13 qui ne se trouve pas dans la troisiéme bande.

Prenant ensuite 1 en —, je vois que 1 de la seconde ne lui sçauroit servir de second terme, parce que le troisiéme seroit 3 qui n'est pas dans la troisiéme bande. A l'égard de 7, il est inutile de chercher si le troisiéme terme qu'il donneroit se trouve dans la troisiéme bande, puisque la différence de — 1 à 7 est 8

qui n'eſt pas un diviſeur du coefficient du premier terme de la quantité propoſée ; donc 1 ſoit qu'on le prenne en + ou qu'on le prenne en — eſt à rejetter.

Parcourant de la même maniere tous les autres nombres de la premiere bande, je ne trouve que 10 qui puiſſe avoir les conditions convenables. Lui donnant 7 pour ſecond terme, il donne la progreſſion 10, 7, 4, 1, —2 dont la différence eſt 3 diviſeur du coefficient de $6x^3$.

Ayant donc écrit cette progreſſion dans la quatriéme colonne, je prend le terme + 4 qui répond à la ſuppoſition de $x = 0$ pour exprimer la partie a du diviſeur cherché, & retranchant le même terme + 4 du terme ſupérieur +7 qui repréſente $m + a$, j'ai + 3 pour exprimer m, c'eſt-à-dire que le diviſeur cherché, s'il doit y en avoir un, ne peut être que $3x + 4$. Je tente donc la diviſion par cette quantité, elle réuſſit, & me donne pour quotient $2x^3 - 3x^2 - 3x + 5$.

XXIV.

Méthode pour trouver les diviſeurs des deux dimenſions, lorſque l'x doit avoir un coefficient.

Examinons préſentement les cas où les diviſeurs doivent avoir deux dimenſions. Soit pris $mx^2 + bx + c$ pour repréſenter le diviſeur cherché d'une quantité donnée, il eſt clair comme ci-deſſus que le dernier terme c ſera un diviſeur du dernier terme de la quantité donnée, & que m ſera un diviſeur du coefficient de la plus haute puiſſance de x dans la quantité donnée.

Choiſiſſant donc d'abord pour repréſenter m un des diviſeurs du coefficient du premier terme de la quantité donnée, & faiſant la mê-

me opération que dans l'art. XIX. à cela près; qu'au lieu de retrancher les quarrés 16, 9, 4, &c. on retranche le produit de ces mêmes quarrés par le nombre qu'on aura choisi pour m, on trouvera de même b & c.

Si le diviseur que l'on a ainsi en mettant dans mx^2+bx+c, pour m le nombre choisi, & pour b, c ceux qui auront été déterminés d'après ce choix, ne réussit pas, on prendra un autre des diviseurs du coefficient du premier terme de la quantité donnée pour représenter m, & l'on achevera le calcul de la même maniere. Si après avoir essayé tous les diviseurs du coefficient du premier terme, il arrivoit qu'on ne trouvât pas de diviseur par cette méthode, on seroit sûr que la quantité proposée n'en devoit point avoir.

XXV.

Application de cette méthode à un Exemple.

Soit pris, pour faire une application de cette méthode la quantité $4x^5+16x^4-22x^3-14x^2-56x+77$ dont on demande un diviseur de deux dimensions. Ayant d'abord placé à l'ordinaire (Table suivante Case 3) dans la premiere colonne les nombres 2, 1, 0, −1, −2, &c. auxquels on égale successivement x; dans la seconde les nombres 117, 5, 77, 153, 437 que devient successivement la quantité proposée par ces valeurs de x; dans la troisiéme tous les diviseurs des nombres de la seconde: je commence par chercher suivant les regles de l'art. XIX. s'il y a quelque diviseur de deux dimensions, dont le premier terme ait

l'unité pour coefficient ; mais n'en trouvant point, Je ſuppoſe que m, c'eſt-à-dire le coefficient du premier terme du diviſeur, ſoit 2 qui eſt un des diviſeurs du coefficient 4 du premier terme de la quantité donnée.

Je place alors dans la quatriéme colonne, au lieu des quarrés des nombres de la premiere, le produit de ces mêmes quarrés par 2 valeur ſuppoſée de m, c'eſt-à-dire que j'ecris dans la quatriéme colonne les nombres 8, 2, 0, 2, 8. Je retranche enſuite ces nombres de tous ceux de la troiſiéme colonne pris en — & en +, ce qui me donne pour la premiere bande de la cinquiéme colonne —125, —47, —21, —17, —11, —9, —7, —5, +1, +5, +31, +109; pour la ſeconde bande —7, —3, &c.

Tous ces nombres écrits, je cherche toujours comme ci-devant des progreſſions arithmétiques parmi tous ces termes, & je ne trouve que la progreſſion +5, —3, —11, —19, —27 que j'écris dans la ſixiéme colonne; cela fait, je prends —11 répondant à zero pour exprimer le nombre c, & retranchant ce nombre de —3 qui eſt au-deſſus, j'ai le reſte +8 pour exprimer b. Le diviſeur qui réſulte donc de la ſuppoſition de $m = 2$ eſt $2x^2 + 8x - 11$, j'eſſaye alors la diviſion qui réuſſit en donnant pour quotient $2x^3 - 7$, & ſans prendre la peine de faire le calcul que demanderoit la ſuppoſition de $m = 4$, je vois qu'il ne doit pas réuſſir, parce qu'il faudroit pour cela que le quotient $2x^3 - 7$ pût ſe

décompoſer, ce qui eſt impoſſible. Ainſi la la quantité propoſée n'a pas d'autre diviſeur de deux dimenſions que $2x^2 + 8x - 11$.

XXVI.

Toute quantité de moins de ſix dimenſions, & qui a des diviſeurs, en doit avoir d'audeſſous de trois dimenſions.

Lorſqu'on cherchera les diviſeurs d'une quantité qui ne paſſera pas le cinquiéme dégré, on pourra toujours les trouver par les méthodes précédentes; car auſſi-tôt qu'on ſe ſera aſſuré par ces méthodes que cette quantité n'aura point de diviſeur, ni d'une, ni de deux dimenſions, on ſera ſur auſſi qu'elle n'en aura pas de trois.

XXVII.

Si la quantité a ſix ou plus de dimenſions, elle pourroit n'avoir de diviſeurs que de trois ou de plus de dimenſions.

Mais ſi la quantité monte à ſix & à plus de dimenſions, elle pourroit n'être décompoſable qu'en des quantités de plus de deux dimenſions. La méthode qu'il faudroit ſuivre pour trouver ces diviſeurs eſt fondée à peu près ſur les mêmes principes que les précédens, je ne m'arrête point à l'expliquer à cauſe de la longueur des calculs.

XXVIII.

Tout ce que nous venons de dire concernant les diviſeurs commenſurables ne regarde que les Equations numériques, cependant les Equations littérales pouvant auſſi avoir des diviſeurs commenſurables, il faut voir ce que l'on doit faire pour les trouver.

Suppoſons d'abord que l'Equation ne renferme qu'une lettre connue avec l'x, & que cette Equation, ſoit ce qu'on appelle homogene, c'eſt-à-dire que tous ſes termes montent à la même dimenſion, telle que l'Equation

$x^4 + 6x^3 + 11x^2 + 10x + 5$ Case 1.

2	133	1.7.19.133	4	—137, —23, —11, —5, —3, +3, +15, +129	+15	+3
1	33	1.3.11.33	1	—34, —12, —4, —2, 0, +2, +10, +32	+10	+2
0	5	1.5	0	—5, —1, +1, +5	+ 5	+1
—1	1	1	1	—2, 0	0	0
—2	3	1.3	4	—7, —5, —3, —1	— 5	—1

$6x^4 - x^3 - 21x^2 + 3x + 20$ Case 2.

2	30	1.2.3.5.6.10.15.30	10
1	7	1.7	7
0	20	1.2.4.5.10.20	4
—1	3	1.3	1
—2	34	1.2.17.34	— 2

$4x^5 + 16x^4 - 22x^3 - 14x^2 - 56x + 77$ Case 3.

2	117	1.3.9.13.39.117	8	—125, —47, —21, —17, —11, —9, —7, —5, +1, +5, +31, +109	+ 5
1	5	1.5	2	—7, —3, —1, +3	— 3
0	77	1.7.11.77	0	—77, —11, —7, —1, +1, +7, +11, +77	—11
—1	153	1.3.9.17.51.153	2	—155, —53, —19, —11, —5, —3, —1, +1, +7, +15, +49, +151	—19
—2	437	1.19.23.437	8	—445, —31, —27, —9, —7, +11, +15, +429	—27

$x^3 - ax^2 - 10a^2x + 6a^3$, par exemple, on n'aura qu'à ſubſtituer l'unité à la place de la lettre connue a de cette Equation, & chercher ſes diviſeurs de la même maniere que ci-deſſus. Ces diviſeurs étant trouvés, s'ils ſont d'une dimenſion, on remettra la lettre a à côté du nombre qui ſert de ſecond terme Si le diviſeur a deux dimenſions, on placera a après le coefficient du ſecond terme, & aa après le nombre qui ſert de troiſiéme terme.

Soit, par exemple, la quantité $x^3 + 4ax^2 - 17a^2x - 12a^3$, après avoir fait $a = 1$, & trouvé que la quantité $x^3 + 4x^2 - 17x - 12$, qui vient par cette opération, a pour diviſeur $x - 3$, je conclus que $x - 3a$ eſt un diviſeur de la quantité propoſée.

Qu'on ait enſuite $2x^5 + 5ax^4 - 3a^2x^3 - 8a^3x^2 - 20a^4x + 12a^5$. En ſuppoſant $a = 1$, on aura $2x^5 + 5x^4 - 3x^3 - 8x^2 - 20x + 12$ qui donne pour diviſeur de deux dimenſions $2x^2 + 5x - 3$. Mettant alors dans ce diviſeur a à côté de 5, & aa à côté de 3, il vient $2x^2 + 5ax - 3aa$ pour le diviſeur de deux dimenſions de $2x^5 + 5ax^4 - 3aax^3 - 8a^3x^2 - 20a^4x + 12a^5$.

XXIX.

Dans une Equation homogene & renfermant trois lettres, on pourroit, en ſuivant les méthodes précédentes, parvenir encore à trouver ſes diviſeurs, tant ſimples que compoſées de deux dimenſions; mais à l'aide de quelques obſervations de calcul qui ſe préſentent aſſez

naturellement, on peut réussir d'une façon un peu plus commode.

Méthode pour trouver tous les diviseurs à deux lettres dans une quantité qui en a trois

Supposons d'abord que la quantité donnée qui renferme trois lettres, a, b, x dut avoir pour diviseur une quantité qui n'en renfermât que deux, que les lettres x, & a, par exemple : puisque ce diviseur quel qu'il soit pourra sans contenir de b, diviser la quantité donnée ou b entre, il faut que la valeur de b soit indifférente à la division, & que cette division puisse se faire de même lorsque b sera zero, donc si on fait $b = 0$ dans la quantité donnée, il faudra que la quantité donnée par cette supposition ait pour commun diviseur avec la quantité entiere, le diviseur cherché. La question est donc en ce cas renfermée dans une autre traitée dans la premiere Partie, art. LXXIII. où l'on a enseigné à trouver le plus grand commun diviseur de deux quantités données : de sorte que par ce qu'on a enseigné dans cet article, on trouvera le diviseur cherché de quelque dimension qu'il soit, pourvû qu'il n'ait que deux lettres.

XXX.

Exemple.

Pour montrer l'application de cette méthode, soit pris d'abord la quantité $x^4 + ax^3 + 2a^2x^2 + 3a^3x + abbx + a^4 + aabb$, dont on cherche un diviseur où les seules lettres a, x entrent.

En faisant $b = 0$ il vient $x^4 + ax^3 + 2a^2x^2 + 3a^3x + a^4$ dont le plus grand commun diviseur avec la quantité entiere, ou, ce qui

revient au même, avec le reſte $abbx + aabb$, eſt $x + a$, qui eſt donc néceſſairement un diviſeur de la quantité donnée, & le plus grand qu'elle puiſſe avoir qui ne contienne pas de b.

XXXI.

Autre exemple.

Soit $x^5 - 4ax^4 + 6aax^3 - abx^3 + abbx^2 + 2aabx^2 - 4a^3x^2 - 2aabbx - 2a^3bx + 2a^3bb$; en faiſant $b = 0$ dans cette quantité on a $x^5 - 4ax^4 + 6aax^3 - 4a^3x^2$ dont il faut chercher le plus grand commun diviſeur avec la quantité propoſée, ou ce qui revient au même, avec le reſte $- abx^3 + abbx^2 + 2aabx^2 - 2aabbx - 2a^3bx + 2a^3bb$, c'eſt-à-dire le plus grand commun diviſeur des quantités $x^3 - 4ax^2 + 6aax - 4a^3$ & $- x^3 + bx^2 + 2ax^2 - 2abx - 2aax + 2aab$.

Or s'il y a un diviſeur commun entre ces deux quantités qui ne contienne pas de b, il ſera auſſi commun aux deux parties $- x^3 + 2ax^2 - 2a^2x$ & $bx^2 - 2abx + 2a^2b$ de la derniere de ces deux quantités; mais le diviſeur commun de ces deux parties ne peut être que $xx - 2ax + 2a^2$, j'examine donc s'il diviſe auſſi $x^3 - 4ax^2 + 6aax - 4a^3$ & comme il le diviſe en effet, je conclus qu'il eſt le diviſeur cherché de la quantité propoſée.

XXXII.

Méthode pour trouver les diviſeurs de trois let-

Suppoſons préſentement que la quantité propoſée compoſée de trois lettres dont on cherche les diviſeurs n'en ait aucun compoſé ſeu-

tres & d'une dimension. lement de deux lettres, ou bien que si elle en renferme, on ait commencé par les trouver, & les mettre à part; pour trouver alors les diviseurs de trois lettres & d'une dimension qu'elle peut avoir, je commence par représenter ce diviseur par $mx+na+pb$; m, n, p étant supposées désigner des nombres. Je remarque ensuite que si on fait successivement, a, x, b égaux à zero dans ce diviseur, on a les trois quantités $mx+pb$, $na+pb$, $mx+na$ telles que les deux termes que chacune d'elles renferme se trouvent répetés dans les deux autres quantités; $mx+pb$ par exemple donné par la supposition de $a=0$, est composé de mx qui se trouve dans $mx+na$ donné par la supposition de $b=0$, & de pb qui se trouve dans $na+pb$ donné par la supposition de $x=0$. Je vois en même-tems que la somme de ces trois quantités $mx+na$, $mx+pb$, $na+pb$, est le double du diviseur entier $mx+na+pb$.

Or comme ces trois quantités sont nécessairement des diviseurs de celles que l'on auroit en faisant les mêmes suppositions de a, x, b égaux à zero, dans la quantité proposée; on tire de-là, que pour trouver les diviseurs de cette quantité qui ne montent qu'à une dimension, & contiennent trois lettres, il faut commencer par écrire séparément les trois quantités, dans lesquelles la proposée se change par la supposition de a, x, b égaux à zero; écrire ensuite à côté de chacune de ces nouvelles quantités tous ses diviseurs d'une di-

menſion & à deux lettres. Cela fait, il faut choiſir trois diviſeurs parmi ces trois claſſes de diviſeurs à deux lettres, en obſervant les conditions dont nous venons de parler, que les deux termes dont chacun de ces diviſeurs ſera composé ſe retrouvent dans les deux autres diviſeurs. Ces trois diviſeurs étant ainſi trouvés, la moitié de leur ſomme ſera le diviſeur de la quantité propoſée ſi elle en a un.

Si pour trouver dans un de ces trois diviſeurs de deux lettres les deux termes qui doivent être la répétition de ceux qui ſont dans les deux autres, il falloit en changer les deux ſignes à la fois, on voit bien que ce changement ſeroit permis, puiſqu'en général une quantité qui en diviſe une autre la diviſera encore, ſi on en change tous les ſignes.

XXXIII.

Application de la méthode précédente à un exemple.

Pour montrer l'application de cette méthode, ſoit propoſée la quantité $2x^3 + 7ax^2 - 3bx^2 + 5a^2x - 3abx + 4b^2x + 10abb - 6b^3$. Ayant d'abord écrit (voyez la Table ci-jointe Caſe 1) dans une colonne verticale les trois quantités $10ab^2 - 6b^3$; $2x^3 - 3bx^2 + 4bbx - 6b^3$; $2x^3 + 7ax^2 + 5a^2x$ dans leſquelles cette quantité ſe change par la ſuppoſition de x, a, b égaux à zero; j'écris dans une ſeconde colonne verticale vis-à-vis de chacune de ces trois quantités leurs diviſeurs à deux lettres & d'une ſeule dimenſion. La premiere fournit $5a - 3b$ & $10 - 6b$; la ſeconde ſeulement $2x - 3b$, & la troiſiéme

$2x+5a$. Cela fait, je vois tout de ſuite que ſi on prend des deux diviſeurs, $5a-3b$, $10a-6$, le premier $5a-3b$; il aura, avec les deux diviſeurs $2x-3b$, $2x+5a$, la proprieté requiſe, car ce premier diviſeur $5a-3b$ contient $5a$ qui eſt répété dans le diviſeur $2x+5a$, & $-3b$ qui eſt répeté dans $2x-3b$; de même $2x-3b$ contient $2x$ qui eſt répeté dans $2x+5a$, & $-3b$ qui eſt répeté dans $5a-3b$; & enfin $2x+5a$ eſt composé de $2x$ & de $+5a$, qui ſont répetés dans les deux autres $5a-3b$, $2x-3b$.

J'ajoute donc ſuivant la regle précédente ces trois diviſeurs, & j'ai $4x-6b+10a$, dont la moitié $2x-3b+5a$ eſt le diviſeur cherché. En effet, ſi on tente la diviſion, on trouve pour quotient $x^2+ax+2bb$.

XXXIV.

Autre exemple.

Soit proposé préſentement de trouver les diviſeurs d'une dimenſion & à trois lettres de la quantité $8x^4-2ax^3-10bx^3-3a^2x^2-5abx^2-12ab^2x+9a^2b^2+15ab^3$. Ayant fait ſucceſſivement x, a, b égaux a zero dans cette quantité, j'ai les trois quantités $9a^2b^2+15ab^3$, $8x^4-10bx^3$, $8x^4-2ax^3-3a^2x^2$ que j'écris (voyez la Caſe ſeconde de la Table ci-jointe) l'une ſous l'autre dans une colonne verticale. J'écris dans une autre colonne verticale à côté de chacune de ces quantités leurs diviſeurs d'une dimenſion & à deux lettres; ceux de la premiere ſont $3a+5b$ & $9a+15b$; ceux de la ſeconde

$4x - 5b$, $8x - 10b$; & ceux de la troisiéme $4x - 3a$ & $2x + a$.

Il n'eſt pas difficile enſuite de trouver que les trois diviſeurs $3a + 5b$, $4x - 5b$, & $4x - 3a$ ont les propriétés requiſes pourvû qu'on prenne le premier $3a + 5b$ en changeant ſes ſignes, c'eſt-à-dire en l'écrivant ainſi $-3a - 5b$; je mets donc à part ces trois diviſeurs dans la quatriéme colonne, je les ajoute, & prends la moitié de la ſomme, ce qui me donne $4x - 3a - 5b$ pour le ſeul diviſeur cherché, ſuppoſé qu'il y en ait un. Je tente la diviſion, & je trouve pour quotient exact $2x^3 + ax^2 - 3ab^2$.

XXXV.

Dans ces deux exemples nous n'avons point écrit les diviſeurs d'une lettre que donnoient chacune des trois quantités de la premiere colonne, parce que ces diviſeurs n'auroient jamais pû être les quantités dans leſquelles le diviſeur à trois lettres ſe change par la ſuppoſition de x, a, b égaux à zero, & que nous avons ſuppoſé qu'on s'étoit aſſuré par la méthode de l'article XXIX. que la quantité propoſée n'avoit pas de diviſeur à deux lettres. Mais ſi on avoit des quantités qui euſſent de ces ſortes de diviſeurs, & qu'on ne voulut pas ſe ſervir de la méthode de l'art. XXIX. on pourroit les trouver en même-tems que ceux à trois lettres par la même méthode que nous venons d'expliquer, pourvû que ces diviſeurs n'euſſent non plus qu'une dimenſion.

Troisiéme exemple où l'on trouve les diviseurs à deux lettres en même-tems que ceux à trois.

Soit par exemple la quantité $16x^3 + 16bxx - 48axx + 35aax - 16abx - 6a^3 + 3a^2b$. Ayant écrit dans une premiere colonne (voyez la Case 3 de la Table ci-jointe) les trois quantités $-6a^3 + 3a^2b$, $16x^3 + 16bxx$, $16x^3 - 48axx + 35a^2x - 6a^3$, dans lesquelles cette quantité se change par la supposition de x, a, b égaux à zero. J'écris dans la seconde colonne, & à la premiere bande, a, $3a$, $-2a+b$, $-6a+3b$ diviseurs d'une dimension & à une ou deux lettres de la quantité $-6a^3 + 3a^2b$. De même dans la seconde bande, j'écris les diviseurs x, $2x$, $4x$, $8x$, $16x$; $x+b$, $2x+2b$, $4x+4b$, $8x+8b$, $16x+16b$, de la seconde quantité $16x^3 + 16bxx$: & dans la troisiéme bande, $a-4x$, $3a-4x$, $x-2a$ diviseurs de la troisiéme quantité $16x^3 - 48axx + 35a^2x - 6a^3$.

Cela fait, à cause du grand nombre de ces diviseurs, il faut plus d'attention que dans les exemples précédens pour n'en laisser aucun qui puisse avoir les conditions requises ; & l'ordre qu'on doit suivre est à peu près le même que celui qu'on a suivi dans les diviseurs numériques. Il faut d'abord comparer le premier de la premiere bande avec tous ceux des autres bandes, & faire ensuite la même opération pour chacun des autres diviseurs de la premiere bande. Je vois d'abord que si a fait partie d'un diviseur de la quantité, ce ne peut être que d'un diviseur qui ne contienne que a & x parce que s'il y avoit un terme qui contint b, ce diviseur ne se seroit pas réduit à a par la sup-

poſition de $x = 0$. Ainſi je n'ai à choiſir dans ce cas que parmi les cinq premiers diviſeurs x, $2x$, $4x$, $8x$, $16x$, & comme de tous ces diviſeurs il n'y a que $4x$ qui ſoit répété dans la troiſiéme, en ſuppoſant que ce diviſeur $4x$ ſoit affecté du ſigne $-$; & qu'en même-tems de tous les diviſeurs de la troiſiéme bande, il n'y a que le premier $a - 4x$ qui renferme le même terme a de la premiere bande, je conclus que ſi a fait partie d'un diviſeur, il faut que ce diviſeur ſoit $a - 4x$, je l'écris donc à part. Je paſſe après à $3a$, & comme je le trouve répété dans le diviſeur $3a - 4x$ de la troiſiéme bande, & que l'autre terme $4x$ du même diviſeur ſe trouve être un des diviſeurs de la ſeconde bande en changeant le ſigne de ce diviſeur, je conclus que $3a - 4x$ peut-être encore un diviſeur de la quantité propoſée, & je le mets à part afin de l'eſſayer.

Quant à $-2a + b$ on voit d'abord qu'il ne peut pas ſeul être un diviſeur de la quantité propoſée, parce qu'il faudroit pour cela que parmi les diviſeurs de $16x^3 + 16bxx$, on eut le terme b que deviendroit $-2a + b$ par la ſuppoſition de $a = 0$, reſte donc à ſçavoir s'il ne feroit pas partie d'un diviſeur où x entreroit; pour m'en aſſurer, je commence par remarquer que de tous les diviſeurs de la ſeconde bande il n'y a que $x + b$ avec lequel on puiſſe le comparer à cauſe qu'il n'y a que ce ſeul diviſeur qui ait le terme $+ b$ de commun avec lui. Je vois auſſi qu'il n'y a que $x - 2a$ de la troiſiéme bande avec lequel je

puiſſe comparer le même diviſeur $-2a+b$, parce qu'il n'y a que lui qui contienne le terme $-2a$. Je vois enſuite que de même que les deux termes du diviſeur $-2a+b$ ſont répétés dans les deux autres diviſeurs $x+b$, $x-2a$, le diviſeur $x+b$ a auſſi ſes deux termes répétés dans les deux autres $-2a+b$, $x-2a$, & réciproquement que les deux termes du diviſeur $x-2a$ ſont répétés dans les deux autres $x+b$, $-2a+b$. De-là je conclus que les trois diviſeurs $-2a+b$, $x+b$, $x-2a$ ont les conditions néceſſaires pour former un diviſeur. Je les ajoute donc, & je mets à part la moitié $x-2a+b$ de leur ſomme pour un diviſeur à tenter. Mais avant d'en faire le calcul j'examine ce que peut me donner le diviſeur $-6a+3b$, je vois tout de ſuite qu'il n'y a aucun de ſes deux termes qui ſoit répété parmi les diviſeurs des autres bandes, & qu'ainſi il faut le rejetter.

Par cet examen on trouve donc les trois diviſeurs $a-4x$, $3a-4x$, $x-2a+b$ à eſſayer, je tente la diviſion par le dernier, elle réuſſit, & ne donne pour quotient $3aa-16ax+16xx$, que je diviſe enſuite par $3a-4x$, & la diviſion réuſſit encore, & me donne pour quotient le premier diviſeur $a-4x$. Ainſi la quantité propoſée étoit le produit de ces trois diviſeurs.

XXXVI.

Méthode pour trouver les diviſeurs de deux di-

Si la quantité propoſée n'a point de diviſeur d'une dimenſion, & qu'on veuille examiner ſi elle n'en a point de deux, on y par-

Case 1.

[illegible]$x + 7ax^2 - 3bx^2 + 5a^2x - 3abx + 4b^2x + 10ab^2 - 6b^3$

$10ab^2 - 6b^3$	$5a - 3b,\ 10a - 6b$	$5a - 3b$
$2x^3 - 3bx^2 + 4bbx - 6b^3$	$2x - 3b$	$2x - 3b$
$2x^3 + 7ax^2 + 5a^2x$	$2x + 5a$	$2x + 5a$
		$5a + 2x - 3b$

Case 2.

$8x^4 - 2ax^3 - 10bx^3 - 3a^2x^2 - 5abx^2 - 12ab^2x + 9a^2b^2 + 15ab^3$

$9a^2b^2 + 15ab^3$	$3a + 5b,\ 9a + 15b$	$-3a - 5b$
$8x^4 - 10bx^3$	$4x - 5b,\ 8x - 10b$	$4x - 5b$
$8x^4 - 2ax^3 - 3a^2x^2$	$4x^3 - 3a,\ 2x + a$	$4x - 3a$
		$4x - 3a - 5b$

Case 3.

$16x^3 + 16bx^2 - 48ax^2 + 35a^2x - 16abx - 6a^3 + 3a^2b$

$-6a^3 + 3a^2b$	$a,\ 3a,\ -2a + b,\ -6a + 3b$	a	$3a$	$-2a + b$
$16a^3 + 16bxx$	$x,\ 2x,\ 4x,\ 8x,\ 16x,\ x + b,\ 2x + 2b,\ 4x + 4b,\ 8x + 8b,\ 16x + 16b$	$-4x$	$-4x$	$x + b$
$16x^3 - 48axx + 35a^2x - 6a^3$	$a - 4x,\ 3a - 4x,\ x - 2a$	$a - 4x$	$3a - 4x$	$x - 2a$
		$a - 4x$	$3a - 4x$	$x - 2a + b$

viendra aſſez facilement à l'aide de quelques obſervations analogues à celles ſur leſquelles eſt fondée la méthode précédente. Soit pris $mxx+nax+pbx+qa^2+rab+sbb$ pour repréſenter le diviſeur cherché à deux dimenſions; faiſant ſucceſſivement $x=0$, $a=0$, $b=0$ dans cette quantité j'ai les trois quantités,

mensions & à trois lettres.

$$qa^2+rab+sbb$$
$$mx^2+pbx+sbb$$
$$mx^2+nax+qa^2$$

qui ſont toutes trois des diviſeurs de ce que devient la quantité propoſée lorſqu'on y a fait ſucceſſivement les mêmes ſuppoſitions de x, a, b égaux a zero. De plus chacun de ces diviſeurs eſt toujours tel, que les termes affectés de lettres quarrées ſont toujours répétés dans les deux autres diviſeurs, tandis que les termes qui contiennent un produit de deux lettres ſont toujours les ſeuls de leur eſpece. Voilà donc des conditions pour examiner les trois claſſes de diviſeurs de deux lettres & de deux dimenſions qu'on tirera d'une quantité propoſée, ainſi quand on en aura trouvé trois qui rempliront ces conditions, on n'aura qu'à les ajouter, prendre enſuite la moitié de tous les termes affectés de quarrés, & laiſſer en entier ceux qui ne ſeront que des rectangles.

XXXVII.

Application de cette méthode à un exemple.

Pour montrer l'application de cette méthode ſoit la quantité $x^5-4ax^4-5a^2x^3+4b^2x^3-a^3x^2-14ab^2x^2+3b^4x-a^4x-3ab^2$, laquelle n'a aucun diviſeur d'une ſeule dimenſion, & dont on cherche quelque diviſeur qui en ait deux.

On commencera par garder (voyez la premiere Case de la Table ci-jointe) les trois quantités $-3a^3b^2$, $x^5+4b^2x^3+3b^4x$; $x^5-4ax^4-5a^2x^3-a^3x^2-a^4x$ qu'on n'aura pas manqué de tirer de cette quantité, en faisant successivement x, a, b égaux à zero, lorsqu'on aura voulu s'assurer qu'elle n'avoit point de diviseurs d'une dimension. On mettra ensuite à côté de ces quantités leurs diviseurs de deux dimensions; la premiere fournissant a^2, ab, b^2 $3a^2$, $3ab$, $3bb$; la seconde x^2+3b^2, x^2+b^2; la troisiéme seulement x^2+ax. Dans cette méthode on ne sçauroit rejetter les diviseurs qui n'ont qu'un terme, quand même on se seroit assuré que la quantité proposée n'a aucun diviseur à deux lettres, parce qu'un diviseur à trois lettres & de deux dimensions peut se réduire à un seul terme par la supposition de l'une des lettres égale à zero.

Il s'agit présentement d'examiner tous les diviseurs de la premiere bande, je vois d'abord que le premier a^2 est à rejetter, parce que ce quarré ne se trouve point répété dans les autres bandes, je passe ensuite à ab, & de ce que ce diviseur ne contient aucun terme affecté de aa & de bb, je conclus que le diviseur dont il pourroit faire partie ne peut avoir outre ce terme que des xx, des ax, & des bx, & comme cette raison exclut la comparaison qu'on pourroit faire de ab avec les diviseurs x^2+3b^2, x^2+b^2, il s'ensuit que si ab doit faire partie d'un diviseur de la proposée, ce diviseur ne peut être que $xx+ax+ba$;

mais je vois en même-tems que $xx+ax+ba$ ne ſçauroit être un diviſeur de la propoſée, puiſqu'il deviendroit ſeulement xx par la ſuppoſition de $a=0$, & que xx n'eſt point un des diviſeurs de la ſeconde bande. Donc le diviſeur ab eſt encore à rejetter.

Quand au diviſeur bb, je le trouve répété dans le diviſeur x^2+b^2 de la ſeconde bande, & trouvant que le même diviſeur x^2+b^2, a x^2 de commun avec le diviſeur de la troiſiéme bande, je conclus que x^2+b^2+ax a les conditions requiſes pour tenter la diviſion. Mais avant de l'entreprendre je paſſe aux autres diviſeurs de la premiere bande, & je vois dabord que $3aa$, & $3ab$ ſont à rejetter par la même raiſon que a^2 & ab; je vois enſuite que $3bb$ étant répété dans le diviſeur x^2+3b^2 & x^2 dans $xx+ax$, il s'enſuit que $xx+3bb+ax$ a auſſi les conditions requiſes pour tenter la diviſion; j'eſſaye alors ces deux diviſions, & je trouve que la ſeconde ſeule réuſſit en donnant pour quotient $x^3-5ax^2+b^2x-a^3$.

Au lieu de parcourir tous les diviſeurs de la premiere bande, on auroit pû examiner le ſeul que la derniere bande contient, & trouver bien plûtôt que x^2+ax+b^2 & $x^2+ax+3b^2$ étoient les ſeuls diviſeurs à tenter. Car il ſuffiſoit alors de remarquer que le diviſeur x^2+ax contenant x^2 qui eſt répété dans x^2+3b^2 & x^2+b^2, & que ces deux derniers contenant l'un $3b^2$ & l'autre b^2 qui ſont chacun dans les diviſeurs de la premiere bande, il s'enſuit que x^2+ax+b^2 & $x^2+ax+3b^2$

ont les conditions requiſes & qu'ils ſont les ſeuls, puiſque s'il y en avoit d'autres, ou bien ils auroient donné d'autres quantités que $xx+ax$ par la ſuppoſition de $b=0$, ou bien d'autres quantités que x^2+3b^2 & x^2+b^2 par la ſuppoſition de $a=0$.

XXXVIII.

Autre exemple.

Qu'on ait préſentement à chercher les diviſeurs de la quantité $2x^5+3ax^4+b^2x^3-a^2x^3+4ab^2x^2+6a^2b^2x+2ab^4-2a^3b^2$, ſoit d'une dimenſion, ſoit de deux, ſoit à deux lettres, ſoit à trois.

$2ab^4-2a^3b^2$, $2x^5+b^2x^3$, & $2x^5+3ax^4-a^2x^3$ étant les quantités que donne, dans la propoſée, la ſuppoſition de x, a, b égaux à zero, il s'agit de ranger d'abord vis-à-vis de chacune de ces quantités tous les diviſeurs qu'elles peuvent avoir tant d'une dimenſion que de deux ; comme la premiere de ces trois quantités en a un aſſez grand nombre, il faut, dans la crainte d'en omettre quelqu'un, les chercher tous avec le même ordre que nous avons ſuivi pour les diviſeurs numériques.

Application de la méthode donnée Art. XIV. pour trouver tous les diviſeurs d'un nombre, aux quantités littérales.

Ayant écrit (voyez la premiere Caſe de la Table ci-jointe) cette premiere quantité $2ab^4-2a^3bb$ à part avec une barre à ſa gauche, & à gauche de cette barre l'unité comme premier diviſeur de la quantité, je poſe 2 audeſſous de 1, parce que c'eſt après 1 le diviſeur le plus ſimple que puiſſe avoir cette quantité, & j'écris à droite de la même barre ab^4-a^3bb; je diviſe enſuite cette quantité par a, & j'écris a à gauche de la barre, en mettant en même-

tems à droite le quotient $b^4 - a^2 b^2$, je multiplie alors a par 2, ce qui me donne $2a$ que j'écris à gauche de l'a comme un nouveau diviſeur de la quantité, puis je diviſe $b^4 - a^2 b^2$, par b, & j'écris le diviſeur b à gauche, & le quotient $b^3 - a^2 b$ à droite; enfin je multiplie b par 2, par a, par $2a$; & je mets à gauche de b, les produits, $2b$, ab, $2ab$ comme de nouveaux diviſeurs de la quantité.

La quantité étant réduite à $b^3 - a^2 b$, je la diviſe encore par b que j'écris toujours à gauche, ainſi que le quotient $bb - aa$ à droite; je ne multiplie point enſuite b par 2, ni par a, ni par $2a$, parce que cela donneroit des diviſeurs que j'ai déja eu; mais je le multiplie par b & par $2b$, ce qui me donne les nouveaux diviſeurs de deux dimenſions bb & $2bb$; ſi j'en voulois admettre de trois dimenſions, ainſi que cela peut être néceſſaire dans d'autres occaſions, je multiplierois outre cela b par ab & $2ab$.

Après avoir réduit la quantité à $bb - aa$, je vois qu'elle eſt diviſible par $b - a$, & que le quotient eſt $b + a$, j'écris donc l'un à gauche & l'autre à droite, & je multiplie $b - a$ par 2, par a, par b, par $2a$, & par $2b$, ce qui me donne pour nouveaux diviſeurs d'une & de deux dimenſions, $2b - 2a$, $ba - aa$, $bb - ab$, $2ba - 2aa$, $2bb - 2ab$. Si j'en avois voulu de trois & de quatre dimenſions, j'aurois outre cela multiplié $b - a$ par ab, $2ab$, abb, $2abb$. $b + a$ n'ayant plus enſuite d'autre diviſeur que lui-même, je l'écris à gauche, & je le multi-

plie par 2, par a, par b, par $2b$, $2a$, $b - a$, $2b - 2a$, ce qui me donne les nouveaux diviſeurs d'une & de deux dimenſions, $2b + 2a$, $ba + aa$, $2ba + 2aa$, $bb + ab$, $2bb + 2ab$, $bb - aa$, $2bb - 2aa$. Si j'en avois voulu admettre de trois, quatre & cinq dimenſions, c'eſt-à-dire tous les diviſeurs que la quantité propoſée pouvoit avoir, j'aurois multiplié outre cela $b + a$ par ab, $2ab$, bb, $2bb$, abb, $2abb$, $ba - aa$, $2ba - 2aa$, $bb - ab$, $2bb - 2ab$, $abb - aab$, $2abb - 2a^2b$, $b^3 - ab^2$, $2b^3 - 2ab^2$, $ab^3 - a^2b^2$, $2ab^3 - 2a^2b^2$.

Cela fait, j'écris (voyez la troiſiéme Caſe de la Table ci-jointe) tous les diviſeurs d'une & de deux dimenſions a, $2a$, b, $2b$, $b - a$, $2b - 2a$, $b + a$, $2b + 2a$, ab, $2ab$, $ab - aa$, $2ba - 2aa$, $bb - ab$, $2bb - 2ab$, $ba + aa$, $2ba + 2aa$, $bb + ba$, $2bb + 2ab$ à côté de la quantité $2ab^4 - 2a^3b^2$ qui les a donnés. J'écris enſuite à côté de la quantité $2x^5 + b^2x^3$ les diviſeurs d'une & de deux dimenſions x, x^2, $2xx + bb$, & à côté de la quantité $2x^5 + 3ax^4 - a^2x^3$ ſes diviſeurs d'une & de deux dimenſions x, x^2, $2xx + 3ax - aa$.

Parcourant après tous ces diviſeurs pour ſçavoir ceux qui peuvent être admis, je trouve bien-tôt qu'il n'y en a aucun d'une ſeule dimenſion, car ne trouvant que x dans la ſeconde & la troiſiéme bande qui ſoit d'une dimenſion, je conclus qu'il doit être le ſeul diviſeur d'une dimenſion s'il y en peut avoir, puiſque ſi le diviſeur d'une dimenſion renfermoit ou un terme affecté de a ou un affecté

de b, celui qui auroit été affecté de a seroit resté dans les diviseurs donnés par la supposition de $b=0$, & que celui qui auroit été affecté de b seroit resté dans les diviseurs donnés par la supposition de $a=0$. Mais x n'est point un diviseur de la quantité proposée, donc il n'y en a point d'une dimension. Je viens ensuite aux diviseurs de deux dimensions, & je commence par x^2 que je prends dans la troisiéme bande; trouvant qu'il est aussi dans la seconde bande, je conclus que s'il fait partie d'un diviseur, il ne peut lui manquer qu'un terme affecté du rectangle ab, parce que s'il y en avoit eu qui fussent affectés de aa, de bb, de ax, ou de bx, ceux qui auroient été affectés de bb ou de bx ne s'en seroient pas allés par la supposition de $a=0$, & ceux qui auroient été affectés de aa ou de ax n'auroient pas disparu par la supposition de $b=0$. Mais je trouve dans la premiere bande ab & $2ab$, donc $xx+ab$, $xx+2ab$, $xx-ab$, $xx-2ab$, sont des diviseurs à tenter.

Je passe ensuite au diviseur $2x^2+3ax-aa$, & je trouve le terme $2x^2$ répété audessus dans le diviseur $2xx+bb$, je trouve en même-tems le terme $-aa$ répété en haut dans plusieurs diviseurs, mais de tous les diviseurs où il est répété, il n'y a que $bb-aa$ qui ait en même-tems le terme bb que contient le diviseur $2xx+bb$, ainsi ce n'est qu'avec $2xx+bb$ & $bb-aa$ que $2x^2+3ax-aa$ peut concourir à former un diviseur qui ait les conditions requises, & ce diviseur qui est $2x^2+3ax$

$-aa+bb$, eſt par conſéquent à tenter, & je vois qu'il n'y en a plus d'autre à chercher, parce que s'il pouvoit y en avoir un qui n'eut pas été déterminé dans l'examen qu'on vient de faire des diviſeurs & de la troiſiéme bande, il faudroit que ce fut un ſeul terme affecté de ab; or on voit tout de ſuite que la quantité n'a point de diviſeur de cette nature.

Je tente alors la diviſion par $2xx+3ax-aa+bb$, elle réuſſit, & me donne pour quotient x^3+2abb qui m'apprend qu'aucune des quantités $xx+ab$, $xx-ab$, $xx+2ab$, $xx-2ab$, ne peut diviſer la propoſée.

XXXIX.

Si la quantité propoſée avoit plus de cinq dimenſions, & qu'après s'être aſſuré qu'elle n'a aucun diviſeur, ni d'une ni de deux dimenſions, on voulut chercher ceux du troiſiéme, quatriéme, &c. dégré qu'elle pourroit avoir, on ſuivroit pour cela une méthode analogue à celles qu'on vient d'expliquer, & qu'il eſt aſſez aiſé d'imaginer.

Si la quantité dont on cherche les diviſeurs renfermoit plus de trois lettres, la méthode qu'il faudroit ſuivre pour les trouver ſeroit à très-peu de choſe près la même que lorſqu'il n'y en a que trois, ainſi nous laiſſerons les Commençans s'y exercer.

XL.

Ce qu'il faut faire pour ouver les

Lorſqu'on aura une quantité dont tous les termes ne ſeront pas homogenes, c'eſt-à-dire

Case 1.

$x^5 - 4ax^4 - 5a^2x^3 + 4b^2x^3 - a^3x^2 - 14ab^2x^2 + 3b^4x - a^4x - 3a^3b^2$

$-3a^3b^2$	$a^3, ab, b^2, 3a^2, 3ab, 3b^2$	b^2	$3b^2$
$x^5 + 4b^2x^3 + 3b^4x$	$x^2 + 3b^2, x^2 + b^2$	$x^2 + b^2$	$x^2 + 3b^2$
$x^5 - 4ax^4 - 5a^2x^3 - a^3x^2 - a^4x$	$x^2 + ax$	$x^2 + ax$	$x^2 + ax$
		$x^2 + b^2 + ax$	$x^2 + 3b^2 + ax$

Case 2.

1	$2ab^4 - 2a^3b^2$
2	$ab^4 - a^3bb$
$2a, a$	$b^4 - a^2b^2$
$2ab, ab, 2b, b$	$b^3 - a^3b$
$2abb, abb, 2bb, bb, b$	$b^2 - a^2$
$2ab^3 - 2a^2b^2, ab^3 - a^2b^2, 2b^3 - 2ab^2, b^3 - ab^2, 2abb - 2aab, abb - aab, 2b^2 - 2ab, bb - ab, 2ba - 2a^2, ba - a^2, 2b - 2a, b - a$	$b + a$
$2ab^3 + 2a^2b^2, ab^3 + a^2b^2, 2b^3 + 2ab^2, b^3 + ab^2, 2ab^2 + 2a^2b, ab^2 + a^2b, 2b^2 + 2ab, b^2 + ab, 2ba + 2a^2, ba + a^2, 2b + 2a, b + a$	1
$2ab^4 - 2a^3b^2, ab^4 - a^3bb, 2b^4 - 2a^2b^2, b^4 - aabb, 2ab^3 - 2a^3b, ab^3 - a^3b, 2b^3 - 2a^2b, b^3 - a^2b, 2bba - 2a^3, bba - a^3, 2b^2 - 2a^2, b^2 - a^2$	

Case 3.

$2x^5 + 3ax^4 + b^2x^3 - a^2x^3 + 4ab^2x^2 + 6a^2b^2x + 2ab^4 - 2a^3b^2$

$2ab^4 - 2a^3b^2$	$a, 2a, b, 2b, b - a, 2b - 2a, b + a, 2b + 2a$ $bb, 2bb, ab, 2ab, bb - aa, 2bb - 2aa, ba - aa, ba + aa, bb - ab$ $bb + ab, 2ba - 2aa, 2ba + 2aa, 2bb - 2ab, 2bb + 2ab$	ab	$2ab$	$bb - aa$
$2x^5 + b^2x^3$	$x, xx, 2xx + bb$	xx	xx	$2xx + bb$
$2x^5 + 3ax^4 - a^2x^3$	$x, x^2, 2xx + 3ax - aa$	xx	xx	$2xx + 3ax - aa$
		$xx + ab$	$xx + 2ab$	$2xx + bb + 3ax - aa$
		$xx - ab$	$xx - 2ab$	

élevés à la même dimension, on n'aura qu'à commencer par mettre tous ses termes à la même dimension à l'aide d'une nouvelle lettre, & chercher les diviseurs de cette nouvelle quantité par les regles précédentes. Ces diviseurs trouvés, on en chassera la nouvelle lettre introduite en la supposant égale à l'unité, & l'on aura par ce moyen les diviseurs cherchés. Que j'aye, par exemple la quantité $x^6 + bx^5 - bx^4 + x^2 + bx - b$; je multiplie le terme bx^4 par a, afin de le rendre de six dimensions. Par la même raison je multiplie x^2 par a^4, bx par a^4, & b par a^5; ce qui me donne la quantité $x^6 + bx^5 - abx^4 + a^4 xx + a^4bx - a^5 b$ que je trouve par les méthodes précédentes être le produit de $xx - ab + bx$ par $x^4 + a^4$. Je suppose $a = 1$ dans ces deux produisans, ce qui me donne $xx - b + bx$, & $x^4 + 1$ pour les deux produisans de la quantité proposée $x^6 + bx^5 - bx^4 + x^2 + bx - b$.

Diviseurs des quantités qui ne sont pas homogenes.

XLI.

Il y a des cas où les diviseurs se trouvent plus facilement qu'en suivant les méthodes précédentes lorsqu'on a un peu d'habitude dans le calcul. Voici un de ces cas sur lequel il est bon de prévenir les Commençans.

Lorsque quelqu'une des lettres de la quantité proposée ne montera qu'à une dimension, il est aisé de voir qu'il ne peut y avoir qu'un des diviseurs de cette quantité qui contienne cette lettre. Donc il y aura au moins un diviseur qui ne la contiendra pas, & alors suivant la méthode de l'article XXIX, pour trouver

Cas où le diviseur se trouve plus facilement que par les méthodes précédentes.

ce diviſeur, il faudra chercher le plus grand commun diviſeur des termes où cette lettre ſe trouve, & des autres termes dans leſquels cette lettre ne ſe trouve pas.

Soit par exemple la quantité $x^4 - 3ax^3 - 8a^2x^2 + 18a^3x + cx^3 - acxx - 8a^2cx + ba^2c - 8a^4$; je cherche le plus grand commun diviſeur des deux parties $cx^3 - acxx - 8aacx + 6a^3c$ & $x^4 - 3ax^3 - 8a^2x^2 + 18a^3x - 8a^4$ de cette quantité, l'une contenant la lettre c, l'autre n'en contenant point, je trouve pour ce plus grand diviſeur commun $x^2 + 2ax - 2aa$, & c'eſt le diviſeur cherché de la quantité propoſée.





ELEMENS D'ALGEBRE.

QUATRIE'ME PARTIE.

Résolution des Equations de dégrés quelconques lorsqu'elles n'ont que deux termes, ou lorsqu'en ayant trois elles peuvent se réduire à celles qui n'en ont que deux par la méthode des Equations du second dégré : avec différentes opérations nécessaires pour ces Equations, comme l'élevation des puissances, l'extraction des racines, la réduction des quantités radicales, &c.



Pre's avoir vû comment on tiroit d'une Equation qui passoit le second dégré, celles du premier & du second dégré qu'elle pouvoit renfermer ; il faut voir ce qu'on a fait pour résoudre

les Equations qui échappent à cette méthode.

I.

Des Equations du troisiéme dégré à deux termes.

Pour aller du plus simple au plus composé, nous commencerons par les Equations qui ne contiennent que deux termes ; supposons d'abord qu'elles ne montent qu'au troisiéme dégré, comme $ax^3 = b$.

Pour résoudre ces Equations, il est bien aisé d'imaginer de délivrer d'abord x^3 de son coefficient, & de prendre la racine cube des deux membres. Le caractere qu'on employe pour exprimer la racine cube, est le même que celui dont on se sert dans la racine quarrée ; mais l'on met un 3 au-dessus pour le distinguer.

On met un 3 sur le caractere $\surd$ pour exprimer la racine cube.

Ainsi pour exprimer la valeur de x qu'on tire de l'Equation $ax^3 = b$ ou $x^3 = \frac{b}{a}$, on met $x = \sqrt[3]{\frac{b}{a}}$. Si par exemple $b = 1000$ & $a = 2$ on a $x = \sqrt[3]{500}$.

II.

Les radicaux cubes ne peuvent avoir qu'un signe à la fois.

Il est à observer qu'on n'a pas ici, comme dans les racines quarrées, la liberté de mettre + ou — devant le signe radical, mais qu'au contraire la racine cube d'une quantité est toujours de même signe que la quantité elle-même : à cause que le cube d'une quantité positive est positif, & que celui d'une quantité négative est négatif.

III.

III.

Cette résolution fournit assez naturellement une réfléxion qui paroît contredire celles qu'on a faites precédemment sur le nombre des racines des Equations. Car un cube n'ayant qu'une racine & cette racine n'ayant qu'un signe, il ne paroît pas qu'une Equation telle que $ax^3_1 = b$ donne plus d'une valeur de x, cependant suivant ce qu'on a vû ci-dessus, on devroit s'attendre à trouver trois racines dans une Equation du 3eme dégré, de même que deux dans une du second.

Que conclure de cette réfléxion? abandonnera-t'on ce principe si satisfaisant par sa généralité, & qui suit si naturellement de la formation des Equations exposée dans la IIIme Partie, article II.? Voici le dénouement de cette difficulté tiré de la même formation.

Qu'on mette l'Equation $ax^3 = b$ sous cette forme $x^3 - \frac{b}{a} = 0$, qu'on mette aussi sa racine $x = \sqrt[3]{\frac{b}{a}}$ sous la forme $x - \sqrt[3]{\frac{b}{a}} = 0$, qu'on divise alors $x^3 - \frac{b}{a}$ par $x - \sqrt[3]{\frac{b}{a}}$, on trouvera une Equation du second dégré qui contiendra les deux autres racines.

Pour en faire le calcul plus aisément, soit fait $\frac{b}{a} = c^3$, on aura donc au lieu des Equations précédentes $x^3 - c^3 = 0$, & $x - c = 0$; divisant la premiere par la seconde, il vient au quotient $xx + cx + cc = 0$, dont les deux racines sont exprimées par . . . .

$x = -\frac{1}{2}c \pm \sqrt{-\frac{3}{4}cc}$, & deviendront la seconde & la troisiéme valeur cherchée de x dans l'Equation $x^3 = \frac{b}{a}$, aussi-tôt qu'on aura remis à la place de c sa valeur $\sqrt[3]{\frac{b}{a}}$.

IV.

La substitution faite, on aura pour ces deux valeurs de x, $-\frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{b}{a}} \pm \sqrt{-\frac{3}{4}\sqrt[3]{\frac{bb}{aa}}}$. Car on voit que le quarré de $\sqrt[3]{\frac{b}{a}}$, c'est-à-dire le produit de $\sqrt[3]{\frac{b}{a}}$ par $\sqrt[3]{\frac{b}{a}}$ doit être $\sqrt[3]{\frac{bb}{aa}}$; & qu'en général la multiplication des racines cubes comme celles des racines quarrées se fait en multipliant d'abord les quantités qui sont sous le signe radical, & en mettant ensuite ce signe devant leur produit.

Comment on multiplie les radicaux cubes.

V.

Racines de l'Equation du troisiéme dégré à deux termes.

Les trois racines de l'Equation proposée $ax^3 = b$, sont donc $x = \sqrt[3]{\frac{b}{a}}$, $x = -\frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{b}{a}} + \sqrt{-\frac{3}{4}\sqrt[3]{\frac{bb}{aa}}}$, $x = -\frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{b}{a}} - \sqrt{-\frac{3}{4}\sqrt[3]{\frac{bb}{aa}}}$; la premiere réelle, & les deux autres imaginaires, mais cependant toujours telles qu'on peut dire qu'elles résolvent l'Equation proposée.

VI.

Supposons maintenant qu'on ait une Equation à deux termes d'un dégré quelconque, on la résoudra de la même maniere, en employant un radical dont l'exposant soit celui de l'inconnue dans cette Equation. Soit, par exemple, l'Equation $ax^m = b$, ou $x^m = \frac{b}{a}$, on en tirera $x = \sqrt[m]{\frac{b}{a}}$.

Des Equations à deux termes & d'un dégré quelconque.

Si m est un nombre impair, cette quantité ne pourra être que négative, lorsque $\frac{b}{a}$ sera négatif, & elle ne pourra être que positive, lorsque $\frac{b}{a}$ sera positif. Si m est un nombre pair, la racine aura comme dans le second dégré le signe $\pm$, & elle ne sera réelle que lorsque $\frac{b}{a}$ sera positif. Dans le cas où $\frac{b}{a}$ sera négatif (m toujours pair) les deux racines exprimées par $\pm\sqrt[m]{\frac{b}{a}}$ seront alors toutes les deux imaginaires. Ainsi toutes les Equations exprimées généralement par $x^m = \frac{b}{a}$ ne pourront au plus, avoir que deux racines réelles, les autres racines étant nécessairement imaginaires.

Ces Equations ne sçauroient jamais avoir plus de deux racines réelles.

Qu'on ait, par exemple, $x^4 = 256$, les deux racines réelles sont $+4$ & -4, les deux imaginaires sont $+\sqrt{-16}$ & $-\sqrt{-16}$ Dans l'Equation $x^5 = 243$ la seule racine réelle est $+3$, & les autres celles qu'on doit trouver

en résolvant l'Equation $x^4 + 3x^3 + 9x^2 + 27x + 81 = 0$ qui vient par la division de l'Equation $x^5 - 243 = 0$ par l'Equation $x - 3 = 0$. Sans résoudre cette Equation, on doit être assuré que ses racines sont toutes imaginaires, puisque s'il y en avoit quelqu'une de réelle, elle résoudroit aussi $x^5 = 243$, & par conséquent il y auroit d'autre nombre réel que 3 qui, élevé à la cinquiéme puissance, donneroit 243.

VII.

Il ne manque présentement à ce que nous venons de dire sur les Equations à deux termes, que de pouvoir abréger ou simplifier les expressions radicales qu'elles donnent lorsqu'il y aura une partie de la quantité dont on pourra prendre exactement la racine, ou même de pouvoir éviter entierement le signe radical lorsque la quantité entiere sera une puissance complette.

Réfléxions sur l'élevation des puissances.

Pour reconnoître ces cas, il faut commencer par faire quelques réflexions sur l'inverse de l'opération qu'on se propose alors, c'est-à-dire sur l'élevation des quantités à des puissances quelconques.

Qu'on ait, par exemple une quantité telle que $a\,b\,c\,d$ à élever à la puissance m, on voit bien qu'il viendra par cette opération $a^m\,b^m\,c^m\,d^m$.

Qu'il s'agisse d'élever à une puissance quelconque, une quantité, comme $\frac{a\,b\,c}{d\,e}$ qui a un diviseur, il est clair qu'il faudra élever le di-

viſeur, ainſi que le numérateur à cette puiſſance quelconque, & que s'il y avoit des coefficiens, il faudroit qu'ils fuſſent auſſi élevés à la même puiſſance. De plus, ſi les facteurs ou produiſans de la quantité donnée ſe trouvoient déja élevés à quelques puiſſances, ils deviendroient alors élevés à une nouvelle puiſſance, dont l'expoſant ſeroit le produit de l'expoſant qu'ils avoient d'abord par celui de la puiſſance à laquelle on les voudroit élever. Ainſi $\frac{2a^2b^3}{3c^4}$ élevé à la puiſſance 3, donnera.... $\frac{8a^6b^9}{27c^{12}}$; $\frac{a^m b^r}{c^n}$ à la puiſſance q, deviendra $\frac{a^{mq}b^{rq}}{c^{nq}}$. Tout cela eſt fort ſimple, & ſuit entierement de ce principe, qu'une quantité élevée à une puiſſance quelconque, eſt ce qui vient de la multiplication de cette quantité par elle-même autant de fois moins une, que l'expoſant de la puiſſance contient d'unités.

VIII.

On voit bien préſentement que l'inverſe de cette opération, c'eſt-à-dire l'extraction des racines ne demandera autre choſe que de diviſer les expoſans des parties ou facteurs de cette quantité par l'expoſant de la racine; ſoit que ces parties ou facteurs ſoient dans le numérateur, ſoit qu'ils ſoient auſſi dans le dénominateur. Qu'il ſoit queſtion, par exemple de

Application des réflé-xions précé-dentes à l'extraction des racines.

prendre la racine cube de $\frac{a^3b^6}{c^9}$, en divisant par 3 les exposans 3, 6, 9, & en mettant leurs quotiens 1, 2, 3, aux mêmes lettres, on aura $\frac{ab^2}{c^3}$ pour la racine cube cherchée.

S'il y avoit eu un coefficient à la quantité, on en auroit pris la racine cube, $\frac{8a^3b^6}{c^9}$, par exemple, auroit donné $\frac{2ab^2}{c^3}$ pour sa racine cube.

De la même maniere, si on cherche la racine quarrée quarrée, ou quatriéme de $\frac{16a^4b^8}{d^4c^{12}}$, on trouvera $\frac{2ab^2}{dc^3}$.

IX.

De l'extraction des racines lorsqu'on a des puissances incompletes.

Lorsqu'il n'y aura qu'une partie de la quantité qui se pourra extraire, on l'extraira, & on laissera le reste sous le signe radical affecté de l'exposant qui lui convient. Soit proposé, par exemple, de prendre la racine cinquiéme de $\frac{32a^{10}b^8}{486c^7}$ qui est composé du produit de $\frac{32a^{10}b^5}{243c^5}$ par $\frac{b^3}{2c^2}$, dont la premiere est exactement la cinquiéme puissance de .....

$\frac{2a^2b}{3c}$, & dont la ſeconde n'a pas de cinquiéme racine, il faudra écrire alors $\frac{2a^2b}{3c}\sqrt[5]{\frac{b^3}{2c^2}}$.

De même la racine cube de $\frac{8a^3b+16a^3c}{54d}$ ſera $\frac{2}{3}a\sqrt[3]{\frac{b+2c}{2d}}$, parce que $\frac{8a^3b+16a^3c}{54d}$ eſt le produit de $\frac{8a^3}{27}$ par $\frac{b+2c}{2d}$, & que la premiere de ces deux quantités eſt un cube parfait, celui de $\frac{2}{3}a$, & que la ſeconde n'a point de racine cube.

De même $\sqrt[5]{\frac{32a^9+128a^6b^3-160a^5b^4}{3b^6}}$ $=\frac{2a}{b}\sqrt[5]{\frac{a^4+4ab^3-5b^4}{3b}}$.

X.

Lorſque la quantité dont il ſera néceſſaire d'extraire la racine ſera compoſée ainſi que les précedentes, de pluſieurs termes, & qu'après avoir ſéparé de tous ſes termes les quantités communes qui ſont des puiſſances complettes, on ſoupçonnera que le reſte pourroit être la puiſſance complette de quelque quantité commenſurable compoſée de pluſieurs termes, l'opération qu'il faudra faire pour s'en aſſurer ſera plus difficile. Afin de trouver la méthode qu'il faut ſuivre dans cette opéra-

tion, nous commencerons par faire quelques réfléxions sur le Problême inverse, c'est-à-dire sur l'élevation des quantités complexes à des exposans donnés, & nous en tirerons ensuite les principes, qu'il faut pour extraire les racines de ces sortes de quantités.

Cherchons d'abord comment l'élevation au cube peut donner la méthode d'extraire les racines cubes, on verra après que les autres puissances n'augmentent la difficulté que par la longueur des calculs.

XI.

Soit prise la quantité complexe la plus simple $u+z$, & soit élevée cette quantité au cube. L'on aura premierement pour son quarré $uu+2uz+zz$, & multipliant ce quarré par la simple puissance, on aura enfin le cube $u^3+3uuz+3uzz+z^3$, qui apprend qu'une quantité quelconque composée de deux parties, étant élevée au cube, donne d'abord le cube de la premiere partie, ensuite le triple du quarré de cette premiere partie multiplié par la seconde partie; de plus, le triple de la premiere partie multiplié par le quarré de la seconde; enfin le cube de la seconde.

En quoi consiste le cube d'un binome

XII.

Méthode qu'il faut suivre pour prendre la racine cube des quantités complexes.

Qu'on ait donc une quantité dont on veuille extraire la racine cube, on commencera par y chercher un terme qui soit un cube, & ce cube représentera u^3, l'on écrira à côté sa racine qui représentera u, on triplera ensuite

le quarré de cette racine, & on le fera servir de diviseur à ce qui reste de la quantité donnée de laquelle on aura ôté le cube de la racine premierement posée; le quotient de cette division sera la seconde partie de la racine, & représentera z; l'ayant écrit à côté du premier terme, on multipliera ensuite ce dernier terme par la quantité qui représente $3uu+3uz+zz$, c'est-à-dire par le triple du quarré de la premiere partie, plus le triple du produit de la premiere quantité par la seconde, plus le quarré de la seconde: la multiplication faite, on retranchera le produit qu'elle donnera de la quantité proposée, dont le premier cube représentant u^3 a déja été ôté. S'il ne reste rien, on sera sûr que la quantité étoit exactement le cube du binome répondant à $u+z$. S'il reste encore plusieurs termes, & qu'on veuille sçavoir si elle ne seroit point le cube d'un trinome; pour trouver le troisiéme terme, on fera des deux termes déja écrits, le même usage qu'on a fait du premier terme lorsqu'on a cherché le second.

XIII.

Quelques exemples éclairciront cette méthode. Soit la quantité $8y^6+60y^4b^2+150b^4y^2+125b^6$; je commence par prendre la racine cube du premier terme $8y^6$, & j'écris cette racine (voyez la Table ci-jointe Case 1) $2y^2$ a côté de la quantité proposée; je récris ensuite le cube de $2y^2$ avec le signe — sous la quantité proposée, en observant d'en chan- Premier exemple.

ger le ſigne, la ſouſtraction ou réduction faite, j'écris le reſte $60y^4b^2 + 150b^4y^2 + 125b^6$, je mets au-deſſus de $2y^2$ le triple de ſon quarré, c'eſt-à-dire $12y^4$, & je diviſe le premier terme $60y^4b^2$ par ce triple $12y^4$, quant au quotient $5b^2$ qui vient de cette diviſion, je l'écris à côté de $2y^2$; j'ajoute enſuite à $12y^4$, $30b^2y^2$ produit du triple de $2y^2$ par la quantité $5b^2$ que je viens d'écrire, & j'ajoute à ces deux premiers termes $25b^4$ quarré de $5b^2$.

Cela fait, je multiplie $5b^2$ par ces trois termes, & j'écris leurs produits avec des ſignes differens ſous la quantité $60y^4b^2 + 150b^4y^2 + 125b^6$, & voyant qu'après la réduction il ne reſte rien, je conclus que la quantité propoſée étoit un cube parfait, & que ſa racine étoit $2y^2 + 5b^2$.

XIV.

Second exemple.

Que j'aye à préſent la quantité $x^6 + 6bx^5 + 21b^2x^4 + 44b^3x^3 + 63b^4x^2 + 54b^5x + 27b^6$ qu'on voit bien au premier coup d'œil devoir donner plus de deux termes pour ſa racine cube, je commence d'abord par trouver avec la même facilité (voyez la table ci-jointe Caſe 2) que dans l'exemple précédent les deux premiers termes $x^2 + 2bx$; mais comme au lieu de ne rien reſter ainſi qu'il eſt arrivé dans cet exemple, il vient pour reſte $9b^2x^4 + 36b^3x^3 + 63b^4x^2 + 54b^5x + 27b^6$, je diviſe le premier terme $9b^2x^4$ de ce reſte par $3x^4$ triple du quarré de x^2, parce que ce ter-

me $3x^4$ eſt le premier du triple du quarré de la quantité $xx+2bx$, laquelle repréſente actuellement la premiere partie (nommée u art. XI.) de la racine cube cherchée : ayant fait cette diviſion de $9b^2x^4$ pour $3x^4$, j'écris le quotient $3b^2$ à côté de $xx+2bx$. Je forme enſuite la quantité $3x^4+12bx^3+21b^2x^2+18b^3x+9b^4$, en ajoutant enſemble le triple du quarré de $xx+2bx$, le triple du produit de $xx+2bx$ par $3b^2$, & le quarré de $3b^2$. Cela fait, je multiplie cette quantité par $3b^2$, & j'écris tous les termes du produit, en changeant leurs ſignes, ſous la quantité $9b^2x^4+36b^3x^3+63b^4x^2+54b^5x+27b^6$, & comme il ne reſte rien après la réduction, je conclus que $x^2+2bx+3b^2$ eſt exactement la racine cube de la quantité propoſée.

XV.

Nous avons vû (IIme Part. art. XXIV, XXV & XXVI.) comment on faiſoit, ſur les quantités radicales du ſecond dégré, les opérations d'addition, ſouſtraction, multiplication, & diviſion. Comme ces opérations ſont également néceſſaires pour les quantités radicales des dégrés plus élevés, nous allons examiner ce que demandent ces nouveaux radicaux.

Additions & ſouſtractions des quantités radicales de toute eſpece.

Quant à l'addition & à la ſouſtraction, il n'y a rien à ajouter à ce qu'on a dit pour les mêmes opérations ſur les radicaux du ſecond dégré, car il ſuffit de réduire chaque radical à ſa plus ſimple expreſſion, & de les ajouter ou de les retrancher comme les quantités commenſurables.

Qu'on ait, par exemple $\sqrt[3]{b^4+2ab^3}$ à ôter de $\sqrt[3]{8a^3b+16a^4}$, on change la premiere quantité en $b\sqrt[3]{b+2a}$, & la seconde en $2a\sqrt[3]{b+2a}$; or la soustraction est alors toute simple, & donne $\overline{2a-b}\sqrt[3]{b+2a}$.

De même si on ajoute $3a\sqrt[4]{16b^8+32b^4a^4}$ avec $4b\sqrt[4]{a^4b^4+2a^8}$, on aura $10ab\sqrt[4]{b^4+2a^4}$.

X V I.

Multiplication & division des quantités radicales qui ont mêmes exposans.

A l'égard de la multiplication & de la division, si les quantités radicales sont de même exposant, c'est encore la même méthode que dans les radicaux du second dégré, il suffit de faire l'opération sur les quantités précédées du signe radical, & de mettre le même signe devant le produit, ou devant le quotient, suivant qu'on aura fait une multiplication ou une division.

Exemples.

C'est ainsi que $\sqrt[3]{5ayy} \times \sqrt[3]{7ayz} = \sqrt[3]{35aay^3z}$, ou $y\sqrt[3]{35a^2z}$.

Que $\sqrt[5]{\frac{9a^2b^3}{4}} \times \sqrt[5]{27a^3b^6} = \sqrt[5]{\frac{243a^5b^9}{4}}$ $= 3ab\sqrt[5]{\frac{b^4}{4}}$.

Que $\sqrt[3]{a^2b^2+b^4}$ divisé par $\sqrt[3]{\frac{a^2-b^2}{8b}}$ don-

ne pour quotient $\sqrt[3]{\frac{8a^2b^3+8b^5}{a^2-b^2}} = 2b\sqrt[3]{\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}}$.

Que $\frac{\sqrt[3]{a^2x^3-x^4}}{\sqrt[3]{ab^4+b^4x}} = \frac{x}{b}\sqrt[3]{\frac{a-x}{b}}$.

XVII.

Mais si l'on veut faire ces mêmes opérations sur des quantités radicales de différens signes, & qu'on ne veuille pas se contenter de la simple marque de multiplication, il faut changer ces quantités radicales en d'autres d'un radical plus composé qui soit le même pour chacune des deux quantités à multiplier ou à diviser.

Pour faire ces opérations sur les quantités radicales de différens exposans, il faut les réduire au même exposant.

Qu'on ait, par exemple $\sqrt[3]{ab}$ & $\sqrt[5]{abb}$ à réduire à un même signe, j'éleve ab à la puissance 5, & j'écris $\sqrt[15]{}$, au lieu de $\sqrt[3]{}$, & j'ai la quantité $\sqrt[15]{a^5b^5}$ qui est la même chose que $\sqrt[3]{ab}$, j'éleve de même ab^2 à la troisiéme puissance, & je mets $\sqrt[15]{}$ au lieu de $\sqrt[5]{}$; ce qui change la quantité $\sqrt[5]{ab^2}$ en $\sqrt[15]{a^3b^6}$. Ainsi s'il avoit fallu multiplier $\sqrt[3]{ab}$ par $\sqrt[5]{abb}$, il seroit venu pour produit $\sqrt[15]{a^8b^{11}}$; & si j'avois eu à diviser la premiere par la seconde, j'aurois trouvé pour quotient $\sqrt[15]{\frac{a^5b^5}{a\ b}} = \sqrt[15]{\frac{a^2}{b}}$.

Méthode pour cette réduction.

De même le produit de $\sqrt[3]{a^2b^4}$ par $\sqrt{a^4b^5}$ auroit été $\sqrt[6]{a^{16}b^{23}} = a^2b^3\sqrt[6]{a^4b^5}$.

En général pour réduire deux quantités radicales $\sqrt[m]{a^p b^q}$ & $\sqrt[n]{a^r b^s}$ à un même ſigne, on changera la premiere en $\sqrt[mn]{a^{pn} b^{qn}}$, & la ſeconde en $\sqrt[mn]{a^{rm} b^{sm}}$; s'il eſt queſtion alors de les multiplier, leur produit ſera $\sqrt[mn]{a^{pn+rm} b^{qn+sm}}$, & ſi on vouloit diviſer la premiere par la ſeconde, le quotient ſeroit $\sqrt[mn]{a^{pn-rm} b^{qn-sm}}$.

Lorſque les deux quantités radicales auront pour expoſans des nombres qui auront un commun diviſeur, on voit qu'il ne ſera pas néceſſaire de changer chaque radical en un autre, dont l'expoſant ſoit le produit de deux premiers expoſans; par exemple que l'on ait $\sqrt{ab}$ & $\sqrt[4]{ab^3}$, on changera le premier en $\sqrt[4]{a^2b^2}$; qu'on ait de même $\sqrt[4]{a^3}$ & $\sqrt[6]{a^5 b}$, on changera la premiere en $\sqrt[12]{a^9b^3}$, & la ſeconde en $\sqrt[12]{a^{10}b^2}$.

XVIII.

Autre maniere de faire les opérations précédentes.

On peut trouver une autre méthode pour faire les opérations précédentes, en employant une réfléxion ſur la nature des quantités radicales, qui ſuit aſſez naturellement de ce qu'on a dit art. VIII. pour extraire toutes ſortes de

racines. C'eſt que les quantités radicales peuvent être regardées comme des puiſſances, dont les expoſans ſont fractionnaires.

Pour faire voir, non-ſeulement comment on eſt arrivé à cette réfléxion, mais la maniere dont on en a fait uſage; cherchons par le moyen de ce que nous avons vû précédemment ce que peuvent être les quantités $\sqrt[m]{a^p b^q}$ & $\sqrt[n]{a^r b^s}$ employés dans l'exemple précédent.

Suivant ce qu'on a dit art. VIII. ſi on avoit les nombres qu'expriment les expoſans p & q, on les diviſeroit par le nombre exprimé par m, & on prendroit leur quotient pour ſervir d'expoſants à a & à b, & ce ſeroit la premiere quantité exprimée $\sqrt[m]{a^p b^q}$. Mais ſans ſçavoir les valeurs particulieres de p, q, m, il eſt évident qu'on peut en cette occaſion, comme en toutes les autres, écrire généralement $\frac{p}{m}$ & $\frac{q}{m}$ pour les quotiens de la diviſion de p & de q par m, c'eſt-à-dire pour les expoſans de a & de b dans la racine m de $a^p b^q$. Donc $a^{\frac{p}{m}} b^{\frac{q}{m}}$ eſt cette racine. De même $\sqrt[n]{a^r b^s}$ ſera $a^{\frac{r}{n}} b^{\frac{s}{n}}$ Pour multiplier préſentement les deux quantités $a^{\frac{r}{n}} b^{\frac{s}{n}}$ & ..... $a^{\frac{p}{m}} b^{\frac{s}{m}}$, dans leſquelles ſont changées les

quantités qu'on avoit à multiplier art. XVII. il faut, comme dans toutes les multiplications de quantités incomplexes, ajouter les exposans des mêmes lettres, c'est-à-dire $\frac{p}{m}$ & $\frac{s}{n}$ avec $\frac{q}{m}$, ce qui donnera $a^{\frac{p}{m}+\frac{r}{n}} b^{\frac{s}{n}+\frac{q}{m}}$

ou $a^{\frac{pn+rm}{mn}} b^{\frac{sm+qn}{mn}}$, en mettant les fractions $\frac{p}{m}$ & $\frac{r}{n}$ au même dénominateur aussi bien que $\frac{s}{n}$ & $\frac{q}{m}$.

Ainsi $a^{\frac{pn+rm}{mn}} b^{\frac{sm+qn}{mn}}$, c'est-à-dire le produit de a élevé à la puissance $\frac{pn+rm}{mn}$ par b élevé à la puissance $\frac{sm+qn}{mn}$ est le produit des quantités proposées.

Il est aisé de voir présentement l'identité de cette expression $a^{\frac{pn+rm}{mn}} b^{\frac{sm+qn}{mn}}$, & de l'expression $\sqrt[mn]{a^{pn+rm} b^{sm+qn}}$ qu'on avoit trouvé dans cet article XVIII. Car par la même

même raiſon qu'on vient de voir que $\sqrt[m]{a^p}$ & $a^{\frac{p}{m}}$ ne déſignoient que la même quantité, on doit voir que $a^{\frac{pn+rm}{mn}}$ & $\sqrt[mn]{a^{pn+rm}}$ ſont la même choſe, ainſi que $\sqrt[mn]{b^{sm+qn}}$ & $b^{\frac{sm+qn}{mn}}$.

Si on avoit voulu au contraire diviſer la premiere quantité $\sqrt[m]{a^p b^q}$ par la ſeconde.... $\sqrt[n]{a^p b^s}$, on auroit retranché l'expoſant $\frac{r}{n}$ de $\frac{p}{m}$ & l'expoſant $\frac{q}{m}$ de $\frac{s}{n}$, & l'on auroit eu $a^{\frac{p}{m}-\frac{r}{n}} b^{\frac{s}{n}-\frac{q}{m}}$ ou $a^{\frac{pn-rm}{mn}} b^{\frac{sm-qn}{mn}}$ pour le quotient.

Afin qu'on ſe familiariſe avec cette tranſformation de quantités radicales en puiſſances fractionnaires, faiſons-en encore quelqu'application. Soit propoſé, par exemple, de diviſer $\sqrt[2p]{a^m b^{3n} c^2}$ par $\sqrt[p]{a^{2m} b^n c}$. On changera d'abord la premiere quantité en $a^{\frac{m}{2p}} b^{\frac{3n}{2p}} c^{\frac{1}{p}}$, & la ſeconde en $a^{\frac{2m}{p}} b^{\frac{n}{p}} c^{\frac{1}{p}}$, enſuite on retranchera les expoſans $\frac{2m}{p}$, $\frac{n}{p}$, $\frac{1}{p}$, qu'ont les lettres a, b, c dans la ſeconde, des expoſants

$\frac{m}{2p}$, $\frac{3n}{2p}$, $\frac{1}{p}$ qu'ont les mêmes lettres dans la premiere, & les restes $-\frac{3m}{2p}$, $\frac{n}{2p}$, o, seront les exposans à donner aux mêmes lettres dans le quotient, c'est-à-dire que $a^{-\frac{3m}{p}} b^{\frac{n}{2p}} c$ est ce quotient.

En trouvant une pareille quantité, il est naturel qu'on soit un peu embarrassé à sçavoir ce qu'elle signifie, car n'ayant point encore rencontré d'exposant qui soit ou zero ou négatif, on ne sçait ce que deviennent les quantités dont elles sont les exposans.

Pour se tirer de cet embarras, soit reprise la question dans l'endroit où commence à paroître la difficulté, c'est-à-dire, lorsqu'on retranche les exposants $\frac{2m}{p}$ de $\frac{m}{2p}$ & $\frac{1}{p}$ de $\frac{1}{p}$ afin de diviser $a^{\frac{m}{2p}}$ par $a^{\frac{2m}{p}}$ & $c^{\frac{1}{p}}$ par $c^{\frac{1}{p}}$.

C'est donc à la place de $\frac{c^{\frac{1}{p}}}{c^{\frac{1}{p}}}$ qu'on met c^o;

& à la place de $\frac{a^{\frac{m}{2p}}}{a^{\frac{2m}{p}}}$ qu'on met $a^{-\frac{3m}{2p}}$; mais

au lieu de $\frac{a^{\frac{m}{2p}}}{a^{\frac{m}{p}}}$ on peut mettre $\frac{1}{a^{\frac{3m}{2p}}}$ à cause que $a^{\frac{2m}{p}}$ est le produit de $a^{\frac{3m}{2p}}$ par $a^{\frac{m}{2p}}$, & au lieu de $\frac{c^{\frac{1}{p}}}{c^{\frac{1}{p}}}$ on peut mettre 1.

Donc les deux quantités à examiner $a^{-\frac{3m}{2p}}$ & c^{0} expriment l'une $\frac{1}{a^{\frac{3m}{2p}}}$, & l'autre 1. Et partant le quotient cherché de $\sqrt[2p]{a^{m} b^{3n} c^{2}}$ divisé par $\sqrt[p]{a^{2m} b^{n} c}$ est $\frac{1}{a^{\frac{3m}{2p}}} \times b^{\frac{n}{2p}} \times 1$ ou $\frac{b^{\frac{n}{2p}}}{a^{\frac{3m}{2p}}}$.

XIX.

La nouveauté des expressions qu'on vient d'employer dans l'article précédent, & la généralité qu'elles apportent dans l'analyse mérite qu'on en fasse une courte récapitulation en les réduisant en principes généraux.

Ce que est qu'une puissance fractionnaire.

1° Lorsqu'une quantité quelconque a pour exposant une fraction, on peut la changer en la racine d'une quantité dont l'exposant sera entier, en prenant pour exposant de la racine le dénominateur de l'exposant proposé, & pour exposant de la quantité sous le signe radical le numérateur du même exposant fractionaire, c'est-à-dire, en termes algebriques, qu'en général $\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}$.

Ce que c'est qu'une puissance négative.

2°. Lorsqu'une quantité a un exposant négatif, on la peut changer en une fraction dont le numérateur est l'unité, & dont le dénominateur est la même quantité avec un exposant pareil au proposé, mais avec le signe +, c'est-à-dire qu'en général $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$.

Ce que c'est que la puissance o.

3°. Toute quantité dont l'exposant est zero se réduit à l'unité, c'est-à-dire que $a^0 = 1$.

La démonstration de ces trois propositions prises dans leur plus grande généralité ne demande point d'autres raisonnemens que ceux qu'on a employés dans l'article précédent. Cependant pour se ressouvenir plus aisément de ces propositions, & pour s'en servir avec plus de confiance, il est à propos de les considerer à part, ce qui se fera facilement de la maniere suivante.

1°. On demontrera que $a^{\frac{n}{m}}$ est la racine m de a^n, si on fait voir qu'en élevant $a^{\frac{n}{m}}$ à la

puiſſance m, il vient a^{n}. Or pour élever $a^{\frac{n}{m}}$ à la puiſſance m, il eſt évident qu'il faut multiplier ſon expoſant par m, ce qui donnera $a^{\frac{n}{m}\times m}$ ou a^{n}.

2°. a^{-m} ſera néceſſairement égal à $\frac{1}{a^{m}}$, ſi en multipliant ces deux quantités par une même puiſſance de a, il vient le même produit. Or qu'on les multiplie l'un & l'autre par une puiſſance de a plus élevée que m par a^{2m}, par exemple, on aura $a^{2m} \times a^{-m}$ ou a^{2m-m} ou a^{m} pour le produit de a^{2m} par a^{-m}, & de même $a^{2m} \times \frac{1}{a^{m}}$ ou a^{m} pour le produit de a^{2m} par $\frac{1}{a^{m}}$, donc a^{-m} & $\frac{1}{a^{m}}$ ſont égaux.

3°. Par la même raiſon a^{0} & 1 ſont égaux, puiſqu'en les multipliant l'un & l'autre par a, il vient $a^{0+1} = 1\,a$ ou $a = a$.

Comme ces trois ſeules propoſitions ſuffiſent pour toutes les réductions, & les tranſformations de même eſpece que les précédentes, & pour une infinité d'autres opérations, les Commençans ne ſçauroient trop s'exercer à en faire des applications. Pour leur en donner le moyen, j'ai joint pluſieurs exemples dans la troiſiéme Caſe de la Table ci-jointe.

XX.

Après avoir réſolu toutes les difficultés

qu'on pouvoit rencontrer dans les Equations à deux termes, il est naturel qu'on ait cherché aussi à résoudre généralement toutes celles qui n'ont que trois termes, mais on est bien loin encore d'avoir trouvé une méthode générale pour toutes les Equations de cette nature; on s'est contenté de les résoudre dans quelques cas particuliers. Par exemple on a trouvé une Classe d'Equations assez étendue qui pouvoit se réduire facilement aux deux cas que nous avons déja vûs, celui des Equations du second dégré, & celui des Equations à deux termes d'un dégré quelconque.

Des Equations à trois termes qui se résolvent par la méthode du second dégré.

Ces Equations sont toutes celles qu'on peut mettre sous cette forme générale .... $x^{2m} + ax^m = b$. Pour les résoudre on ajoutera ainsi que dans les Equations du second dégré ce qui manque au premier membre pour en faire un quarré, ce qui donnera $x^{2m} + ax^m + \frac{1}{4}aa = b + \frac{1}{4}aa$ dont la racine est $x^m + \frac{1}{2}a = \pm\sqrt{b + \frac{1}{4}aa}$, & par conséquent $x^m = -\frac{1}{2}a \pm \sqrt{b + \frac{1}{4}aa}$ qui n'est qu'une Equation à deux termes, & qui donne pour la valeur de x, $\sqrt[m]{-\frac{1}{2}a \pm \sqrt{b + \frac{1}{4}aa}}$, par laquelle on résoudra toutes les Equations à trois termes dont le premier sera affecté d'une puissance d'x double de celle qui affecte le second terme, & dont le troisiéme sera une quantité connue, on voit par la nature de cette expression, & par ce qu'on sçait déja sur les racines des Equations, que toutes les Equations renfermées dans la formule générale

$$8y^6+60y^4b^2+150b^4y^2+125b^6 \quad \Big| \quad 12y^4+30y^2b^2+25b^4$$
$$-8y^6 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 2y^2+5b^2$$

$$60y^4b^2+150b^4y^2+125b^6$$
$$-60y^4b^2-150b^4y^2-125b^6$$
$$0 \quad 0 \quad 0$$

Case 1.

$$x^6+6bx^5+21b^2x^4+44b^3x^3+63b\ x^2+54b^5x+27b^6 \quad \Big| \quad 3x^4+12bx^3+21b^2x_2+18b^3x+9b^4$$
$$3x^4+6bx^3+4b^2x^2$$
$$-x^6 \qquad\qquad\qquad x^2+2bx+3b^2$$

$$6bx^5+21b^2x^4+44b^3x^3$$
$$-6bx^5-12b^2x^4-8b^3x^3$$

$$9b^2x^4+36b^3x^3+63b^4x^2+54b^5x+27b^6$$
$$-9b^2x^4-36b^3x^3-63b^4x^2-54b^5\ x-27b^6$$
$$0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0$$

Case 2.

Case 3

$$\frac{a^2b^{-3}}{c\,a^{-1}}=a^3b^{-3}c^{-}=\frac{a^3}{b^3c}$$

$$\sqrt{\frac{a^{-2}b^2}{a\,b^{-1}}}=\sqrt{a^{-3}b^3}=\sqrt{\frac{b^3}{a^3}}=\frac{b^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{a^{\frac{2}{3}}\sqrt{b^{-3}}}{\sqrt[3]{a^2}}=a^{\frac{2}{3}}b^{-\frac{3}{2}}a^{-\frac{2}{3}}=a^{-\frac{1}{3}}b^{-\frac{3}{2}}=\frac{1}{a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{b\sqrt{b}\sqrt[3]{a}}$$

$$\frac{\sqrt[3]{\frac{a^2}{b}c^5}\times\sqrt[4]{ac^3}}{\sqrt{\frac{abb}{c}}}=a^{\frac{2}{3}}b^{-\frac{1}{3}}c^{\frac{5}{3}}a^{\frac{1}{4}}c^{\frac{3}{4}}a^{-\frac{1}{2}}b^{-1}c^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{2}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}}b^{-\frac{1}{3}-1}c^{\frac{5}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}}=a^{\frac{5}{12}}b^{-\frac{4}{3}}c^{\frac{35}{12}}$$

$$=\frac{a^{\frac{5}{12}}c^{\frac{35}{12}}}{b^{\frac{4}{3}}}=\frac{\sqrt[12]{a^5c^{35}}}{\sqrt[3]{b^4}}=\frac{c^2\sqrt[12]{a^5c^{11}}}{b\sqrt[3]{b}}$$

$x^{2m} + ax^{m} = b$ ne peuvent pas avoir plus de quatre racines réelles, & qu'elles n'en auront que deux, lorsque m sera un nombre impair.

XXI.

Exemple de la méthode précédente.

Pour faire quelqu'application de cette méthode, supposons d'abord qu'on ait l'Equation $x^4 - bbxx = bbcc$, en ajoutant des deux côtés $\frac{1}{4}b^4$ quarré de la moitié du coefficient de xx; on aura $x^4 = bbxx + \frac{1}{4}b^4 = \frac{1}{4}b^4 + bbcc$, dont la racine quarrée est $xx - \frac{1}{2}bb = \pm b\sqrt{\frac{1}{4}bb + cc}$ d'où l'on tire $xx = \frac{1}{2}bb \pm \sqrt{\frac{1}{4}bb + cc}$, & partant $x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}bb \pm b\sqrt{\frac{1}{4}bb + cc}}$ susceptible de deux valeurs réelles & de deux imaginaires. Les deux premieres sont ..... $x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}bb + b\sqrt{\frac{1}{4}bb + cc}}$, les deux autres $x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}bb - b\sqrt{\frac{1}{4}bb + cc}}$, nécessairement imaginaires à cause que $b\sqrt{\frac{1}{4}bb + cc}$ est plus grand que $\frac{1}{2}bb$.

XXII.

Autre exemple.

Soit ensuite l'Equation $x^6 - 2a^2bx^3 = a^6$; ajoutant des deux côtés a^4bb il vient $x^6 - 2aabx^3 + a^4bb = a^4bb + a^6$ dont la racine quarrée est $x^3 - aab = a^2\sqrt{aa + bb}$ ou $x^3 = aab \pm a^2\sqrt{aa + bb}$ qui donne enfin $x = \sqrt[3]{aab \pm a^2\sqrt{a^2 + b^2}}$ susceptible de deux valeurs réelles; l'une positive, l'autre né-

gative. Les quatre autres racines de la même Equation qu'on trouveroit facilement en opérant comme dans l'article III. seroient imaginaires.

XXIII.

Troisiéme exemple.

Soit à présent $x^4 - \overline{aa + bb} \times xx = - aabb$ en ajoutant des deux côtés $\frac{1}{4}a^4 + \frac{1}{2}aabb + \frac{1}{4}b^4$, on aura $x^4 - \overline{aa + bb} \times xx + \frac{1}{4}a^4 + \frac{1}{2}aab^2 + \frac{1}{4}a^4 = \frac{1}{4}a^4 - \frac{1}{2}aabb + \frac{1}{4}b^4$, dont le second membre est aussi bien un quarré que le premier. Prenant ensuite la racine quarrée de part & d'autre, on a $xx - \frac{1}{2}aa - \frac{1}{2}bb = + \frac{1}{2}aa \mp \frac{1}{2}bb$ qui donne $xx = aa$ & $xx = bb$, c'est-à-dire $x = + a$ & $x = \pm b$ qui sont les quatre racines de l'Equation $x^4 - \overline{aa + bb} \times xx = - aabb$; on auroit trouvé également ces racines par la méthode de la troisiéme Partie en cherchant les diviseurs commensurables.

XXIV.

Quatriéme exemple.

Soit encore l'Equation $x^4 - \overline{2gh + 4ff} \times xx = - gghh$, on aura en ajoutant le quarré de la moitié du coefficient du second terme, & en prenant ensuite la racine quarrée, $x^2 - gh - 2ff = \pm 2f\sqrt{gh + ff}$ qui donne .... $x = \pm \sqrt{gh + 2ff \pm 2f\sqrt{gh + ff}}$. Or en reféchissant un peu sur cette quantité on découvre bien-tôt que ce qui est sous le signe radical est un quarré, celui de $f \pm \sqrt{ff + gh}$;

car on voit dans le terme $2f\sqrt{gh+ff}$ le double produit de f & de $\sqrt{gh+ff}$, & dans la quantité $gh+2ff$ on voit le quarré de f & le quarré $ff+gh$ de la partie radicale.

Ainſi la valeur précédente de x ſe réduit, en ſuppoſant qu'on eut choiſi le ſigne $+$ pour le premier radical, à $f\pm\sqrt{ff+gh}$, & en ſuppoſant qu'on eut pris le ſecond ſigne $-$ du même premier radical, à $-f\mp\sqrt{ff+gh}$; ce ſont là les quatre racines de l'Equation $x^4 - 2ghxx - 4ffxx = -gghh$.

Dans cet exemple l'habitude du calcul pouvoit facilement faire ſoupçonner que la quantité $gh + 2ff \pm 2f\sqrt{gh+ff}$ avoit une racine quarrée; mais il pourroit y avoir beaucoup de cas où les quantités trouvées de la même maniere ſeroient auſſi des quarrés ſans qu'on s'en doutât, il eſt donc à propos de chercher une méthode générale pour reconnoître ces ſortes de quantités, & pour trouver leurs racines.

XXV.

Pour y parvenir, je commence par remarquer que la racine d'une quantité compoſée de deux parties, dont l'une eſt commenſurable, & dont l'autre eſt un radical du ſecond dégré, doit être elle-même compoſée de deux parties, & qu'au moins l'une des deux doit être un radical.

Méthode pour trouver les racines quarrées des quantités en partie commenſurables, & en partie radicales.

Newton ?

Cela poſé, je prends $A+B$ pour exprimer en général la quantité propoſée, A déſi-

gnant la partie rationelle, & B un radical quelconque du second dégré, je prends ensuite $p+q$ pour exprimer la racine cherchée.

Je remarque maintenant que soit que p soit la quantité radicale, soit que ce soit q, ou que ce soit tous les deux, le quarré $p^2+2pq+q^2$ ne pourra avoir que le terme $2pq$ de radical; comparant donc ce quarré avec la quantité donnée; $2pq$ représentera B & p^2+q^2, A, c'est-à dire, en termes algébriques, qu'on aura pour déterminer p & q les deux Equations $p^2+q^2=A$, $2pq=B$.

On tire de la seconde $p=\frac{B}{2q}$ qui étant substituée dans la premiere donne........
$\frac{B^2}{4q^2}+q^2=A$ ou $q^4-Aq^2=-\frac{B^2}{4}$ ou ..
$q^2-\frac{1}{2}A=\pm\frac{1}{2}\sqrt{AA-BB}$, & partant
$q=\pm\sqrt{\frac{1}{2}A\pm\frac{1}{2}\sqrt{A^2-B^2}}$. Substituant ensuite cette valeur de q dans l'Equation
$p^2+q^2=A$ ou $p=\mp\sqrt{A-q^2}$ on a
$p=\pm\sqrt{\frac{1}{2}A\mp\frac{1}{2}\sqrt{A^2-B^2}}$, donc la racine cherchée de la quantité $A+B$ est.......
$\pm\sqrt{\frac{1}{2}A\pm\frac{1}{2}\sqrt{A^2-B^2}}\pm\sqrt{\frac{1}{2}A\mp\frac{1}{2}\sqrt{A^2-B^2}}$
ou simplement......................
$\pm\sqrt{\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}\sqrt{A^2-B^2}}+\sqrt{\frac{1}{2}A-\frac{1}{2}\sqrt{A^2-B^2}}$.

Car il est évident que cette expression revient absolument au même que l'expression

$\pm\sqrt{\frac{1}{2}A-\frac{1}{2}\sqrt{A^2-B^2}}+\sqrt{\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}\sqrt{A^2-B^2}}$ qu'on auroit en prenant en $-$ le ſigne de $\sqrt{A^2-B^2}$.

Quant aux ſignes que doivent avoir les deux parties $\sqrt{\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}\sqrt{A^2-B^2}}$ & $\sqrt{\frac{1}{2}A-\frac{1}{2}\sqrt{A^2-B^2}}$ de la racine cherchée de $A+B$, ils doivent être les mêmes, ſi le radical B eſt poſitif & contraire, ſi B eſt négatif, car il eſt aiſé de voir qu'en général $p+q$ ou $-p-q$ étant la racine de $A+B=pp+qq+2pq$, $p-q$ ou $-p+q$ eſt celle de $A-B=pp+qq-2pq$.

XXVI.

Par la valeur qu'on vient de trouver pour la racine de la quantité $A+B$, on pourroit craindre de tomber dans une difficulté pareille à celle qu'on avoit d'abord à réſoudre. Car $\sqrt{\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}\sqrt{A^2-B^2}}$ & $\sqrt{\frac{1}{2}A-\frac{1}{2}\sqrt{A^2-B^2}}$ ſemblent au premier coup d'œil déſigner des racines de quantités en parties rationelles, & en parties irrationelles, & ſi cela étoit la difficulté ſeroit reſtée au même point. Il faut donc pour que la méthode ſoit de quelque utilité, que la quantité A^2-B^2 qui ſe trouve ſous le ſigne radical, ſoit un quarré commenſurable. Or c'eſt ce qui ne ſçauroit manquer d'arriver toutes les fois que $A+B$ ſera dans le cas d'avoir une racine. Pour s'en aſſurer, il

ſuffit de ſe reſſouvenir (article XXV) que $p-q$ eſt $\sqrt{A-B}$ en même-tems que $p+q$ eſt $\sqrt{A+B}$, car on en tirera tout de ſuite que $\sqrt{A-B}\times\sqrt{A+B}$ ou $\sqrt{AA-BB}$ eſt $\overline{p-q}\times\overline{p+q}$ ou $pp-qq$, c'eſt-à-dire une quantité commenſurable.

XXVII.

Application de la méthode précédente à un exemple.

Pour montrer préſentement l'application de la méthode précédente, ſoit pris pour exemple la quantité $aa+2c\sqrt{aa-cc}$ en la comparant avec $A+B$, on a $a^2=A$ & $B=2c\sqrt{aa-cc}$, & par conſéquent $\sqrt{A^2-B^2}=aa-2cc$ d'où l'on tire $\sqrt{\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}\sqrt{A^2-B^2}}=\sqrt{aa-cc}$, & de même $\frac{1}{2}\sqrt{A-\frac{1}{2}\sqrt{A^2-B^2}}=c$; c'eſt-à-dire que la racine cherchée eſt $c+\sqrt{aa-cc}$ ou $-c-\sqrt{aa-cc}$.

XXVIII.

Autre exemple.

Si on avoit à prendre la racine quarrée de $16+6\sqrt{7}$, en faiſant $A=16$ & $B=6\sqrt{7}$ on auroit $\sqrt{AA-BB}=2$, & partant $\sqrt{\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}\sqrt{AA-BB}}$ ſeroit 3 & $\sqrt{\frac{1}{2}A-\frac{1}{2}\sqrt{AA-BB}}$ ſeroit $\sqrt{7}$, d'où $3+\sqrt{7}$ ou $-3-\sqrt{7}$ ſeroit la racine cherchée.

XXIX.

Soit maintenant la quantité .... $ap - 2a\sqrt{ap - aa}$. Faisant $A = ap$ & $B = -2a\sqrt{ap - aa}$ on a $\sqrt{AA - BB} = ap - 2aa$ & $\sqrt{\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}\sqrt{AA - BB}} = \sqrt{ap - aa}$, & de même $\sqrt{\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}\sqrt{A^2 - B^2}} = a$, c'est-à-dire que la racine cherchée sera $\sqrt{ap - aa} - a$ ou $a - \sqrt{ap - aa}$.

XXX.

Si la quantité proposée est $b^2 - ab + \frac{1}{4}a^2 + 2\sqrt{ab^3 - 2a^2b^2 + \frac{1}{4}a^3b}$; on aura $A = b^2 - ab + \frac{1}{4}aa$, $B = 2\sqrt{ab^3 - 2a^2b^2 + \frac{1}{4}a^3b}$, & $\sqrt{A^2 - B^2} = \sqrt{b^4 - 6ab^3 + \frac{19}{2}a^2b^2 - \frac{3}{2}a^3b + \frac{1}{16}a^4} = bb - 3ab + \frac{1}{4}aa$, ce qui donnera $\sqrt{\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}\sqrt{A^2 - B^2}} = \sqrt{bb - 2ab + \frac{1}{4}aa}$ & $\sqrt{\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}\sqrt{A^2 - B^2}} = \sqrt{ab}$ d'où la racine cherchée est $\sqrt{ab} + \sqrt{bb - 2ab + \frac{1}{4}aa}$ ou $-\sqrt{ab} - \sqrt{bb - 2ab + \frac{1}{4}aa}$. Cet exemple est plus propre que les précédens à faire voir la nécessité de sçavoir prendre la racine des quantités en parties rationelles & en parties irrationelles. Car dans les cas précédens la racine cherchée ne contenant qu'un radical pouvoit être tirée d'une Equation du second dégré

Troisiéme exemple.

qui auroit été contenue dans l'Equation pour la résolution de laquelle on avoit cherché à prendre cette racine. Au lieu que dans ce dernier la valeur de la racine cherchée contenant deux radicaux, il étoit impossible qu'elle vint d'aucune Equation du second dégré. En effet, lorsque nous avons eu à prendre (art. XXVII) la racine de $aa + 2c\sqrt{aa - cc}$, c'étoit la même chose que si on avoit dû résoudre l'Equation $x^4 - 2aaxx - 4aacc + 4c^4 + a^4$ de laquelle on pouvoit tirer par la IIIeme Partie art. XXXVI. les Equations $xx - 2cx + 2cc - aa = 0$ & $xx + 2cx + cc - aa = 0$, au lieu que la racine quarrée de .... $b^2 - ab + \frac{1}{4}aa + \sqrt{ab^3 - 2a^2b^2 + \frac{1}{4}a^3b}$ devoit servir à la résolution de $x^4 + 2 \times \overline{ab - bb - \frac{1}{4}aa} \times x^2 + \frac{19}{2}a^2b^2 - 6ab^3 - \frac{3}{2}a^3b + b^4 + \frac{1}{16}a^4 = 0$ qui n'est point décomposable en deux Equations du second dégré.

XXXI.

Après avoir appris à distinguer parmi les quantités qui sont en partie rationelles, & en partie irrationelles, celles qui sont des quarrés, on a dû chercher à distinguer aussi celles qui sont des cubes ou d'autres puissances plus élevées, puisque cela étoit nécessaire pour avoir completement tout ce qui regarde les Equations comprises sous la forme $x^{2m} + ax^m = b$ ou $x = \sqrt[m]{-\frac{1}{2}a + \sqrt{b + \frac{1}{4}aa}}$. Voyons d'abord ce que l'on pouvoit faire pour le cas où $m = 3$,

c'eſt-à-dire pour trouver la racine cube d'une quantité quelconque $A + B$, dans laquelle A eſt rationel, & B un radical du ſecond dégré.

Méthode pour trouver la racine cube des quantités en partie commenſurables, & en partie incommenſurables.

Newton? Clairaut?

Nous remarquerons d'abord que la racine cube d'une quantité de cette nature, ne peut pas renfermer plus d'un radical du ſecond dégré; car on voit bien que le cube d'une quantité qui contiendroit deux de ces radicaux, telle que $\sqrt{m} + \sqrt{n}$ donneroit au moins deux radicaux.

Nous remarquerons enſuite que la même racine cube cherchée ne pourra pas contenir d'autre eſpece de radicaux, à moins que ce ne ſoit un radical cube, & qu'il ne ſoit commun aux deux parties de la racine, telle que ſeroit la quantité $f\sqrt[3]{m} + \sqrt[3]{g} \times \sqrt{m}$ dont le cube $mf^3 + 3mfg + 3mff + mg\sqrt{g}$, ainſi que la quantité propoſée $A + B$, a une partie commenſurable, & une partie radicale du ſecond dégré.

Cela poſé, ſoit pris $p + q$ pour exprimer la racine cherchée, q étant la partie affectée du radical du ſecond dégré, ſoit qu'il ſoit d'ailleurs ainſi que p affecté d'un radical cube, ſoit qu'ils ne le ſoient ni l'un ni l'autre.

Il eſt évident que le cube $p^3 + 3p^2q + 3pq^2 + q^3$ ne contiendra pas d'autre radical que le radical du ſecond dégré qui eſt dans q, & qu'il n'y aura que les termes $3ppq$ & q^3 qui ſoient affectés de ce radical. On comparera donc ces deux termes à la quantité donnée B, & les deux autres à A; ce qui donnera les

Equations $A = p^3 + 3pq^2$ & $B = 3p^2q + q^3$.

Pour résoudre ces deux Equations, il faut d'abord commencer par chasser l'une des deux inconnues p ou q, ce qui se peut faire aisément par les principes établis dans la seconde Partie, art. XXXIII. Mais on peut abreger le calcul par le secours d'une remarque qui a dû se présenter facilement à des Algébristes un peu exercés, c'est que $AA - BB$ sera toujours le cube de $pp - qq$, lorsque $A + B$ sera le cube de $p + q$. Car $p + q$ étant la racine cube de $p^3 + 3pq^2 + 3p^2q + q^3$, dont la premiere partie $p^3 + 3pq^2$ est A, & la seconde $3p^2q + q^3$ est B, $p - q$ est nécessairement la racine cube de $A - B$ qui est alors $p^3 + 3pq^2 - 3p^2q - q^3$; & par conséquent $pp - qq$ ou $\overline{p - q} \times \overline{p + q}$ est $\sqrt[3]{A + B} \times \sqrt[3]{A - B}$, c'est-à-dire $\sqrt[3]{AA - BB}$. Cela posé, on a donc l'Equation $\sqrt[3]{A^2 - B^2} = p^2 - q^2$ ou $n = p^2 - q^2$, dans laquelle n est donnée, & ne peut être qu'une quantité commensurable ou un simple radical cube.

De l'Equation $n = p^2 - q^2$ ou $q^2 = p^2 - n$, & de l'Equation $A = p^3 + 3pq^2$, on tire tout de suite $4p^3 - 3pn - A = 0$, Equation qu'il faut résoudre pour avoir la premiere partie p de la racine cube cherchée. Aussi-tôt qu'elle sera résolue, on aura la seconde partie de cette même racine cube cherchée en employant l'Equation $q = \sqrt{p^2 - n}$.

Quant au signe radical il sera positif, si le radical de la proposée a le signe $+$, & de même

même négatif si le radical de la proposée a le signe —. Car on voit aisément que la partie radicale du cube de $p + q$, laquelle est .... $\overline{3pp + qq} \times q$ sera toujours du même signe que q.

Si la racine de la quantité proposée $A + B$ ne doit point avoir de radical cube qui affecte tous ses termes, n ou $\sqrt[3]{A^2 - B^2}$ sera une quantité commensurable, & par conséquent l'Equation $4p^3 - 3pn - A$ ne contiendra pas de radicaux, & comme p sera alors commensurable, on ne pourra pas manquer de le trouver en cherchant tous les diviseurs de cette Equation par la méthode donnée dans la IIIeme Partie art. XXXII.

Si la racine cherchée doit avoir ses deux parties affectées d'un radical cube, ce qu'on aura reconnu en ne trouvant point un cube parfait pour $A^2 - B^2$, on verra quelle est la quantité par laquelle il faudroit multiplier la quantité proposée pour en former une nouvelle dont les deux parties étant prises pour A & pour B donneroient pour $AA - BB$ un cube parfait. Trouvant alors la racine cube de cette nouvelle quantité substituée à la proposée, il ne faudroit plus que la diviser par la racine cube du multiplicateur dont on se seroit servi, & l'on auroit la racine cherchée.

Quant à la détermination de ce multiplicateur, elle sera facile en remarquant que la question est la même que si on se proposoit de trouver la quantité quarrée, par laquelle

il faudroit multiplier la quantité qu'on a trouvé d'abord pour $AA - BB$ afin d'en faire un cube parfait ; car il est clair que la racine quarrée de ce multiplicateur de $AA - BB$ seroit le multiplicateur qu'on devroit donner aux quantités proposées A & B.

XXXII.

Application de la méthode précédente à un exemple.

Pour montrer l'application de cette méthode, supposons qu'on cherche la racine cube de la quantité $7a^3 - 3a^2b + 5aa - ab\sqrt{2aa - ab}$.

Par la comparaison de cette quantité avec $A + B$ j'ai $7a^3 - 3a^2b = A$; $5aa - ab\sqrt{2aa - ab} = B$, & partant $A^2 - B^2 = -a^6 + 3a^5b - 3a^4b^2 + a^3b^3$, & n ou $\sqrt[3]{A^2 - B^2} = -aa + ab$. Substituant cette valeur de n, ainsi que celle de A dans l'Equation $4p^3 - 3pn - A = 0$, j'ai $4p^3 + 3paa - 3pab - 7a^3 + 3a^2b$ dont il est question de trouver un diviseur d'une dimension. On trouvera facilement par la méthode enseignée dans la IIIeme Partie, article XXXII. que ce diviseur est $p - a$, c'est-à-dire que la valeur de p est a. Substituant cette valeur de p dans l'Equation $q = \sqrt{pp - n}$, il vient $q = \sqrt{2aa - ab}$. Donc la racine cherchée est $a + \sqrt{2aa - ab}$.

XXXIII.

Autre exemple.

Soit présentement proposé de prendre la

racine cube de $2aac - abc - bbc - \overline{2a - b}$ $\sqrt{\overline{aacc - bbcc}}$, je commence par faire $2aac - abc - bbc = A$ & $B = - \overline{2a - b}$ $\sqrt{\overline{aacc - bbcc}}$, ce qui me donne $A^2 - B^2 = 2b^4cc - 2ab^3cc$ qui n'eſt point un cube. Pour ſçavoir ce qui peut le rendre cube, je le décompoſe en ſes produiſans, & il devient $2 \times cc \times \overline{b - a} \times b^3$; d'où je découvre aiſément qu'en le multipliant par $\frac{4 \times \overline{b - a}^2}{cc}$ qui eſt une quantité quarrée, j'aurai un cube parfait, celui de $2 \times \overline{b - a} \times b$ ou de $2bb - 2ab$; & par conſéquent que ſi on multiplie la quantité propoſée par $\frac{2b - 2a}{cc}$ racine du quarré ..... $\frac{4 \times \overline{b - a}^2}{cc}$, on aura une nouvelle quantité .... $\overline{2aa - ab - bb} \times \overline{2b - 2a} - \overline{2a - b} \times \overline{2b - 2a}$ $\sqrt{\overline{aa - bb}}$, dont la premiere partie repréſentant A, & la ſeconde B donnera pour ...... $\sqrt[3]{\overline{AA - BB}}$, c'eſt-à-dire pour n, $2bb - 2ab$. Je ſuppoſe donc que l'on m'eût en effet donné ces quantités pour A & pour B, & que j'en euſſe tiré cette valeur de n. Dans ce cas l'Equation $4p^3 - 3pn - A$ donneroit $4p^3 - 3p \times \overline{2bb - 2ab} + \overline{bb + ab - 2aa} \times \overline{2b - 2a} = 0$, à laquelle on trouveroit par la méthode donnée dans la IIIeme Partie, article XXXII. le diviſeur $p + a - b$, c'eſt-à-dire que la valeur de p ſeroit alors $b - a$; la ſubſtituant dans

$q = \sqrt{pp - n}$ on auroit $q = \sqrt{aa - bb}$, donc $b - a - \sqrt{aa - bb}$ ſeroit la racine cube de la nouvelle quantité, ou ce qui revient au même du produit de la quantité propoſée par $\frac{2b - 2a}{c}$. Donc $\frac{\overline{b - a - \sqrt{aa - bb}} \times \sqrt[3]{c}}{\sqrt[3]{2b - 2a}}$ eſt la racine cube cherchée de la quantité propoſée.

Dans cet exemple & dans tous ceux où la racine cherchée ſe trouvera affectée de radicaux cubes, il eſt clair qu'on ne ſçauroit, pour ſe diſpenſer d'employer la méthode précédente, avoir recours à la méthode de la IIIeme Partie, article XXXVI. c'eſt-à-dire qu'on ne pourra trouver aucun diviſeur dans l'Equation dont la ſolution auroit conduit à donner pour valeur d'x la racine cube cherchée. En effet il eſt aiſé de voir que l'Equation . . $x^6 - 2x^3 \times \overline{2aac - abc - bbc} + 2b^4cc - 2ab^3cc$ qui auroit donné . . . . $x = \sqrt[3]{2aac - abc - bbc - \overline{2a - b}\sqrt{aacc - bbcc}}$ n'auroit point été décompoſable.

Mais dans tous les cas où la racine cherchée doit être ſimplement compoſée d'un terme rationel & d'un irrationel du ſecond dégré, on parviendroit toujours à trouver cette racine en décompoſant l'Equation dont la ſolution auroit conduit à chercher la racine cube de la quantité propoſée. Dans l'article XXXII. par exemple, où il étoit queſtion de réduire l'expreſ-

ſion $x = \sqrt[3]{7a^3 - 3a^2b + 5aa - ab\sqrt{2aa - ab}}$ on auroit pû trouver dans l'Equation . . . . $x^6 + \overline{6a\,b - 14a^3} \times x - a^6 + 3a^5b - 3a^4b^2 + a^3b^3 = 0$ d'où ſeroit venue cette valeur de x, une Equation du ſecond dégré $xx - 2ax + ab - aa = 0$ qui auroit donné la même valeur de x.

XXXIV.

Si les termes de la quantité dont on voudra prendre la racine cube ont des diviſeurs, on commencera par les mettre tous au même dénominateur, & on diviſera enſuite la racine cube du numérateur par celle du dénominateur.

XXXV.

Méthode pour trouver les racines cubes des quantités numériques en partie commenſurables, &c.

Lorſque la quantité propoſée en partie commenſurable & en partie incommenſurable ſera ſeulement numérique, on pourra trouver ſa racine cube plus aiſément que par la méthode précédente.

Car, ſuppoſant d'abord que la racine cherchée ne doive point avoir de radical cube, mais qu'elle ſoit compoſée d'un nombre entier & d'une partie radicale ſimple & entiere auſſi, on tire de ce que $p - q$ eſt $\sqrt[3]{A - B}$ lorſque $p + q$ eſt $\sqrt[3]{A + B}$ ou ce qui revient au même de ce que $p = \frac{\sqrt[3]{A - B} + \sqrt[3]{A + B}}{2}$

une maniere ſimple d'avoir la partie commenſurable de la racine cherchée, il ne faut pour cela que calculer en nombres entiers les plus proches les quantités $\sqrt[3]{A-B}$ & $\sqrt[3]{A+B}$, & prendre enſuite la moitié de ces deux nombres pour avoir la valeur exacte de p. Car en prenant pour $\sqrt[3]{A-B}$ & pour $\sqrt[3]{A+B}$ les nombres entiers qui en approchent le plus, l'erreur qu'on peut commettre ſur chacune de ces quantités ne ſçauroit être de $\frac{1}{2}$, & par conſéquent il ne peut pas arriver que le nombre entier qui en réſulte pour $\frac{\sqrt[3]{A-B}+\sqrt[3]{A+B}}{2}$, c'eſt-à-dire pour p, différe d'une unité de la vraye valeur de p, & comme cette vraye valeur de p doit être un nombre entier, elle ſera donc exactement déterminée par ce moyen.

Ayant ainſi la valeur de p, & ſçachant déja celle de n ou de $\sqrt[3]{AA-BB}$, on ſubſtituera, comme dans la méthode précédente les valeurs de p & de n dans $q=\sqrt[3]{pp-n}$, & l'on aura la ſeconde partie de la racine cube cherchée.

Si la racine cherchée doit avoir ſes deux termes affectés d'un même radical cube, ce qu'on aura reconnu en remarquant que A^2-B^2 n'étoit pas un cube parfait; il faudra en ſuivant la même méthode que celle qu'on a employée dans les quantités littérales, chercher le nombre par lequel on devroit multiplier $A+B$ afin que $AA-BB$ fut un cube parfait:

& ayant trouvé la racine de la nouvelle quantité que devient $A+B$ par cette multiplication, on n'aura qu'à la diviser par la racine cube du nombre dont on s'est servi pour multiplier $A+B$, & le quotient sera la racine cherchée.

XXXVI.

Application de la méthode précédente à un exemple.

Supposons, pour montrer l'application de cette méthode, qu'on cherche la racine cube de $7+5\sqrt{2}$. Ayant fait $A=7$, $B=5\sqrt{2}$, je trouve que n ou $\sqrt[3]{A^2-B^2}=-1$. Je remarque ensuite que la valeur de $\sqrt[3]{A+B}$ ou de $\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}$ est plus proche de 2 que de 3, ainsi je prends 2 pour l'exprimer; remarquant de même que celle de $\sqrt[3]{A-B}$ ou de $\sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}$ est entre 0 & 1, mais plus proche de 0, je prends 0 pour cette quantité, & j'ai par ce moyen p ou $\frac{\sqrt[3]{A+B}+\sqrt[3]{A-B}}{2}=1$ Je substitue alors cette valeur de p dans $q=\sqrt{pp-n}$, & j'ai $q=\sqrt{2}$, d'où je conclus que si la quantité proposée $7+5\sqrt{2}$ a une racine cube, elle est $1+\sqrt{2}$, en effet cubant $1+\sqrt{2}$ il vient $7+5\sqrt{2}$.

XXXVII.

Autre exemple.

Supposons présentement qu'on eut à prendre la racine cube de $5+3\sqrt{3}$; on trouve-

roit alors $AA - BB = -2$, or 2 n'étant point cube il faut chercher le nombre par lequel il auroit fallu multiplier $5 + 3\sqrt{3}$ pour que $AA - BB$ eut été cube, ou ce qui revient au même il faut chercher le nombre le plus simple par le quarré duquel $AA - BB$, c'est-à-dire 2, étant multiplié on aura un cube. Or on voit tout de suite que 2 est lui-même ce nombre. Supposons donc que l'on se fut proposé de trouver la racine cube de $10 + 6\sqrt{3}$. On auroit eu alors $n = -2$ & $\frac{\sqrt[3]{A+B} + \sqrt[3]{A-B}}{2}$

ou $\frac{\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}} + \sqrt[3]{10-6\sqrt{3}}}{2}$ auroit été 1 en nombre entier le plus proche. Je substitue donc ces valeurs de p & de n dans $q = \sqrt{pp - n}$, & j'ai $q = \sqrt{3}$. J'examine maintenant si $p + q$ ou $1 + \sqrt{3}$ est la racine cube de $10 + 6\sqrt{3}$, & je trouve qu'elle l'est en effet. D'où je conclus que $\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}}$ est la racine cube cherchée de $5 + 3\sqrt{3}$.

XXXVIII.

Simplication de la méthode précédente.

On simplifiera le calcul d'approximation par lequel on détermine p, en remarquant qu'au lieu de $\frac{\sqrt[3]{A+B} + \sqrt[3]{A-B}}{2}$, on peut écrire ...

$$\frac{\sqrt[3]{A+B} + \frac{n}{\sqrt[3]{A+B}}}{2}$$

à cause que n ou $\sqrt[3]{AA - BB}$

$= \sqrt[3]{A - B} \times \sqrt[3]{A + B}$. Or cette expreſſion eſt en effet plus ſimple que $\frac{\sqrt[3]{A+B} + \sqrt[3]{A-B}}{2}$, parce qu'il eſt plus aiſé de diviſer par $\sqrt[3]{A+B}$ le nombre n, qui eſt ſuppoſé déja trouvé, que de calculer ſéparement $\sqrt[3]{A-B}$.

XXXIX.

Application de la nouvelle méthode.

Pour montrer l'uſage de cette nouvelle formule; appliquons-là à l'exemple de l'article XXXVI. ou A étoit $= 7$, & $B = 5\sqrt{2}$; après avoir trouvé de même que dans cet article que $n = -1$ & qne $\sqrt[3]{A+B}$ en nombres entiers les plus proches étoit 2, au lieu de chercher comme dans le même article la racine cube approchée de $7 - 5\sqrt{2}$, je diviſe n ou -1 par la valeur 2 de $\sqrt[3]{A+B}$ ce qui me donne $-\frac{1}{2}$ que je ſubſtitue dans la formule précédente $\frac{\sqrt[3]{A+B} + \frac{n}{\sqrt[3]{A+B}}}{2}$, & j'ai $\frac{2 - \frac{1}{2}}{2}$ ou 1 (prenant le nombre entier le plus proche) pour la valeur de p, ainſi qu'on l'avoit trouvé dans cet article par la formule $\frac{\sqrt[3]{A+B} + \sqrt[3]{A-B}}{2}$, le reſte s'acheveroit de même.

X L.

Cette nouvelle méthode pourroit être fautive dans les cas où A & B sont de signes différens.

Il est à remarquer cependant que cette nouvelle formule pourroit induire en erreur si A & B n'étoient pas de même signe, car dans les cas où ces quantités seroient des signes différens, la vraye valeur de $\sqrt[3]{A+B}$ pourroit être si petite auprès de n, que le nombre entier le plus proche qu'on prend à la place de

cette valeur donneroit pour $\dfrac{\sqrt[3]{A+B}+\dfrac{n}{\sqrt[3]{A+B}}}{2}$

un nombre qui différoit du vrai d'une ou de plusieurs unités. Qu'on eut, par exemple, à prendre la racine cube de $45-29\sqrt{2}$ en faisant $A=45$ & $B=-29\sqrt{2}$, on auroit 1 pour le nombre entier le plus proche de . . , $\sqrt[3]{A+B}$ ou $\sqrt[3]{45-29\sqrt{2}}$ & comme . . . . $\sqrt[3]{AA-BB}$ seroit alors 7, p ou . . . . . .

$\dfrac{\sqrt[3]{A+B}+\dfrac{n}{\sqrt[3]{A+B}}}{2}$ seroit en ce cas trouvé égal à 4, quoi qu'il ne fût réellement que 3, ainsi qu'on peut voir par l'expression . . . . . .

$\dfrac{\sqrt[3]{A+B}+\sqrt{A-B}}{2}$ de la méthode précédente.

Ce qu'il faut faire en ce cas.

Mais pourvû que cette nouvelle méthode d'avoir p, soit d'un usage sûr toutes les fois

que A & B ſont de même ſigne, il importe peu qu'elle s'applique aux cas où ces quantités ſont de ſignes differens. Car on voit bien que dans ces cas on n'a qu'à commencer par ſuppoſer A & B tous deux poſitifs, & en prendre la racine $p+q$. Enſuite faire p du même ſigne que A, & q du même ſigne que B.

Il ne s'agit donc plus que de s'aſſurer ſi toutes les fois que A & B ſont de même ſigne, ou ce qui revient au même ſi A & B étant tous deux poſitifs, on peut, ſans craindre d'erreur, ſubſtituer dans $\dfrac{\sqrt[3]{A+B}+\dfrac{n}{\sqrt[3]{A+B}}}{2}$ à la place de $\sqrt[3]{A+B}$ le nombre entier le plus proche. Pour nous en convaincre, commençons par ſuppoſer, ce qui ne peut jamais aller ſi loin, qu'on ſe trompât de $\frac{1}{2}$ en prenant pour $\sqrt[3]{A+B}$ le nombre entier le plus proche. Dans ce cas la quantité qu'on trouveroit au lieu de p ſeroit . . $\dfrac{\sqrt[3]{A+B}\pm\frac{1}{2}+\dfrac{n}{\sqrt[3]{A+B}\pm\frac{1}{2}}}{2}$. Pour faire voir que cette expreſſion ne ſçauroit donner un nombre qui differe d'une unité de la vraye valeur de p, mettons dans cette quantité $p+q$ au lieu de $\sqrt[3]{A+B}$, & $pp-qq$ au lieu de n, elle deviendra $p+q\pm\frac{1}{2}+\dfrac{pp-qq}{p+q\pm\frac{1}{2}}$ de laquelle

retranchant p on tire en réduisant $\frac{\pm q + \frac{1}{4}}{2p + 2q \pm 1}$ pour l'erreur que peut apporter, dans la détermination de p, le choix qu'on a fait du nombre entier au lieu de $\sqrt[3]{A+B}$. Or il est clair que cette quantité ne sçauroit jamais égaler $\frac{1}{2}$, car dans la premiere expression $\frac{q + \frac{1}{4}}{2p + 2q + 1}$ qu'elle renferme, le numérateur $q + \frac{1}{4}$ étant plus petit que la moitié de $2q + 1$, est à plus forte raison plus petit que la moitié de $2p + 2q + 1$: & dans la seconde expression $\frac{-q + \frac{1}{4}}{2p + 2q - 1}$ qu'elle renferme encore, le numérateur $-q + \frac{1}{4}$ étant plus petit que la moitié de $2q$ est par conséquent plus petit aussi que la moitié de $2q + 2p - 1$.

Ainsi on ne sçauroit se tromper d'une unité en déterminant p par la méthode précédente, & par conséquent toutes les fois qu'une quantité comme $A + B$, dans laquelle il n'entrera, soit sous le signe radical, soit devant ce signe, aucun nombre fractionnaire devra avoir une racine cube $p + q$, dans laquelle il n'y ait aussi aucun nombre fractionnaire, on trouvera cette racine par la méthode précédente.

X L I.

Cas où la méthode précédente pourroit induire dans l'erreur.

Mais si la quantité $A + B$, quoique ne contenant que des nombres entiers, soit dehors, soit dessous le signe radical, devoit avoir une racine cube qui contînt des nombres fractionnaires, telle que la quantité $2 + \sqrt{5}$ dont la

racine cube eſt $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$ la méthode précédente auſſi-bien que celle de l'art. XXXV. ne donneroit rien alors, & jetteroit dans l'erreur en faiſant croire qu'il n'y auroit point de racine cube à eſpérer.

Pour remédier à cet inconvenient, il faut commencer par chercher directement quelles ſont toutes les eſpeces de racines fractionaires dont les cubes pourroient être des nombres entiers. Moyen de s'en garentir.

Clairant ?

Pour les trouver ſoient repréſentées toutes ces racines par $\frac{p}{m} + \frac{q}{n}$, p & m étant ſuppoſés des nombres entiers qui n'ont aucun commun diviſeur, q la racine d'un nombre en entier qui ne permet aucune réduction avec le nombre n. En élevant cette quantité au cube on aura $\frac{p^3}{m^3} + \frac{3pq^2}{mnn}$ pour la partie rationelle ; & $\overline{\frac{3pp}{nmm} + \frac{qq}{n^3}} \times q$ pour la partie incommenſurable. De plus par les conditions du Problême que nous cherchons à réſoudre, tant la premiere quantité $\frac{p^3}{m^3} + \frac{3pq^2}{mnn}$, que le coefficient $\frac{3pp}{nmm} + \frac{qq}{n^3}$ de la ſeconde doivent être des nombres entiers.

Soit d'abord égalé $\frac{3p^2}{mmn} + \frac{qq}{n^3}$ à h que je ſuppoſe exprimer un nombre entier. On aura

donc $qq = hn^3 - \frac{3ppnn}{mm}$; mais cette quantité doit être un nombre entier par l'hypothese, donc $\frac{3ppnn}{mm}$ doit être un nombre entier, donc $\frac{3nn}{mm}$ doit l'être, & partant n doit être un multiple de m.

Cela posé, soit fait $n = ml$, on aura $qq = hm^3l^3 - 3ppll$, mettant ces valeurs de n & de qq dans $\frac{p^3}{m^3} + \frac{3pqq}{mnn}$, cette quantité deviendra après les réductions $-\frac{8p^3}{m^3} + 3phl$ qui doit être un nombre entier. Or p & m n'ayant aucun commun diviseur, cette quantité ne sçauroit être un nombre entier que m ne soit ou 1 ou 2. Voilà donc m fixé, quant à n ou à ml on voit bien-tôt qu'il doit être égal à m, parce que l'Equation $qq = hm^3l^3 - 3ppll$ donne $\frac{q}{l} = \sqrt{hm^3l - 3pp}$ & partant $\frac{q}{ml}$ ou $\frac{q}{n} = \frac{1}{m}\sqrt{hm^3l - 3pp}$ qui apprend que la seconde partie de la racine ne peut pas avoir d'autre dénominateur que la premiere, & que ce dénominateur par conséquent ne peut jamais être non plus que 2 ou 1.

Ainsi lorsqu'on n'aura pas réussi à trouver, par la méthode précédente, la racine d'une quantité $A + B$, dont la partie rationelle ou commensurable A, & l'irrationelle B seront des nombres entiers, on n'aura qu'à multiplier cette

quantité par 8, & chercher par la même méthode la racine cube de la nouvelle quantité qu'on aura par cette multiplication, & si on ne réussit pas, on sera sûr que la quantité proposée n'étoit pas un cube, si on réussit la moitié de la racine cube qu'on aura alors, sera celle qu'on cherchoit.

XLII.

Lorsque le nombre A & le radical B seront fractionnaires, il est clair qu'il faudra ainsi que dans l'article XXXIV. mettre A & B au même dénominateur, puis diviser la racine cube du numérateur par celle du dénominateur.

XLIII.

Ce qu'il faut faire quand la racine cube doit être la somme de deux radicaux.

Si on proposoit de prendre la racine cube d'une quantité composée de deux radicaux du second dégré, soit que cette quantité fut numérique ou qu'elle fut littérale, il n'y auroit qu'à la multiplier par le cube de l'un des radicaux que contiendroit cette quantité. Le produit étant alors dans le cas des quantités qu'on vient de traiter, on en prendroit la racine cube de la même maniere, & on la diviseroit par le radical dont le cube auroit servi de multiplicateur à la proposée.

XLIV.

Comment on prend la racine quatriéme des quantités de

Lorsqu'on voudra prendre la racine quatriéme d'une quantité comme $A + B$, on n'aura d'abord qu'à en chercher la racine quarrée, car

même espece que les précédentes. si on n'en trouve pas, à plus forte raison n'en trouvera-t'on pas de racine quatriéme ou quarrée quarrée. Si on en trouve une, il ne sera plus question que de trouver la racine quarrée de la quantité que la premiere extraction aura donnée.

XLV.

Ce qu'il faut faire toutes les fois que l'exposant de la racine est pair.

Il en sera de même toutes les fois qu'on aura une racine à prendre dont l'exposant sera pair, il faudra commencer par la racine quarrée, & le Problême sera réduit à prendre une racine d'un exposant sous-double du premier.

XLVI.

Pour les racines cinquiémes.

Si on vouloit la racine cinquiéme d'une quantité $A+B$ telle que les précédentes, il faudroit suivre une méthode semblable à celle qu'on a suivie pour la racine cube. Au lieu des deux théorêmes, par lesquels on apprenoit que

$p = \frac{\sqrt[3]{A+B} + \sqrt[3]{A-B}}{2}$, & que $\sqrt[3]{A^2 - B^2}$ $= p^2 - q^2$, on auroit ceux-ci . . . .

$p = \frac{\sqrt[5]{A+B} + \sqrt[5]{A-B}}{2}$ & $\sqrt[5]{A^2 - B^2} = p^2 - q^2$

dont on feroit le même usage que des précédens.

XLVII.

Il en seroit de même pour les racines plus élevées. Que m soit l'exposant de la racine qu'on

qu'on ſe propoſe de prendre de $A+B$; on aura ces deux théorêmes $p = \frac{\sqrt[m]{A+B}+\sqrt[m]{A-B}}{2}$ & $\sqrt[m]{A^2-B^2} = p^2 - q^2$, qu'on employera encore de la même maniere que dans les racines cubes.

Pour démontrer ces théorêmes en général, il ne ſera queſtion que de faire voir que ſi $A+B$ eſt la puiſſance m de $p+q$, $A-B$ ſera celle de $p-q$, car il ſuivra de-là néceſſairement que $\sqrt[m]{A+B} \times \sqrt[m]{A-B}$ ſera $\overline{p+q} \times \overline{p-q}$ ou $pp-qq$, & que .... $\frac{\sqrt[m]{A+B}+\sqrt[m]{A-B}}{2}$ ſera $\frac{p+q+p-q}{2}$ ou p.

Quant à la démonſtration de ce que $A-B$ eſt la puiſſance m de $p-q$, lorſque $A+B$ eſt celle de $p+q$, elle ſeroit aiſée à trouver ſi on vouloit y arriver par l'induction. Car en donnant ſucceſſivement différentes valeurs particulieres à m, & reconnoiſſant la vérité de ce théorême dans chaque cas particulier, on en concluroit la vérité en général. Mais on ſent bien qu'on ne ſçauroit ſe contenter d'une pareille maniere de démontrer, qu'au cas que l'on ne pût pas trouver une expreſſion générale pour la puiſſance m de $p+q$, & pour celle de $p-q$, il faut donc chercher cette expreſſion générale, qui d'ailleurs doit exciter la curioſité de tous les Analyſtes.

XLVIII.

De la maniere d'élever un binome à une puissance quelconque.

Pour parvenir à trouver la valeur générale de $\overline{p+q}^m$ ou de $p+q$ multiplié par lui-même autant de fois moins une que l'unité est contenue dans m, commençons par chercher dans ce que nous avons vû précédemment ce qui peut avoir du rapport avec cette opération. Reprenons dans cette vûe ce que nous avons dit dans la IIIeme Partie article II. où nous avons formé une Equation par le produit de ses racines $x+a$, $x+b$, $x+c$, &c. & où nous avons trouvé la loi suivant laquelle devoient être composés tous les termes de ce produit, il est aisé de voir que tout ce que nous avons dit alors pourra s'appliquer au cas présent, en supposant que toutes les racines sont égales. Or ce que nous avons dit IIIeme Partie article III. sur l'Equation dont les racines sont $x+a$, $x+b$, $x+c$, &c. consistoit en ceci.

1°. Que le premier terme de cette Equation étoit composé de x élevé à une puissance égale au nombre des racines.

2°. Que le second terme étoit composé de x élevé à une puissance moindre d'une unité, & ayant pour coefficient la somme des racines.

3°. Que le troisiéme terme étoit composé de x élevé à une puissance moindre de deux unités, & ayant pour coefficient la somme de tous les produits des racines prises deux à deux.

4°. Que le quatriéme terme étoit composé de x élevé à une puissance moindre de trois unités, & ayant pour coefficient la somme de tous les produits des racines prises trois à trois, &

ainſi des autres termes.

Si on applique donc ces remarques dans le cas préſent où toutes les racines ſont égales, & où leur nombre eſt exprimé généralement par m, on verra

Que le premier terme ſera x^{m};

Que le ſecond ſera x^{m-1} multiplié par ma, puiſque toutes les racines ſont égales à a, & que leur nombre eſt m;

Que le troiſiéme terme ſera x^{m-2} avec un coefficient égal à a^2, pris autant de fois qu'il y aura de rectangles ab, ac, bc, &c. dans le coefficient du troiſiéme terme de l'Equation donnée par le produit des racines $x+a$, $x+b$, &c. dont le nombre eſt ſuppoſé m; puiſque tous les produits ab, ac, bc, &c. doivent tous être égaux chacun à a^2, lorſque b, c, &c. ſont égaux à a;

Que le quatriéme terme ſera x^{m-3} avec un coefficient égal à a^3, pris autant de fois qu'il y aura de produits abc, abd, acd, bcd, &c. dans le coefficient du quatriéme terme de l'Equation dont le nombre des racines $x+a$, $x+b$, $x+c$, &c. eſt m, & ainſi des autres termes.

La queſtion eſt donc réduite maintenant à ſçavoir ce qu'un nombre m de lettres peut donner de produits ab, ac, bc, &c. priſes deux à deux; de produits abc, abd, bcd, acd, &c. priſes trois à trois; de produits $abcd$, $abde$, $abce$, $acde$, $bcde$, &c. priſes quatre à quatre,

&c. Car en ſuppoſant que ces nombres ſoient trouvés, & qu'on les exprime par A, B, C, D, &c. .... $x^m + max^{m-1} + Aa^2x^{m-2} + Ba^3x^{m-3} + Ca^4x^{m-4} + Da^5x^{m-5} +$ &c. ſera la valeur cherchée de $\overline{x+a}^m$.

Pour trouver premierement ce qu'un nombre m de lettres a, b, c, &c. peut donner de produits de deux lettres ab, ac, bc, &c. en les combinant de toutes les manieres poſſibles; commençons par remarquer que lorſqu'on aura formé tous ces produits, on aura écrit deux fois plus de lettres que de termes.

Remarquons enſuite que chacune des lettres a, b, c, &c. doit être répetée le même nombre de fois, & que chacune ne pouvant être multipliée que par toutes les autres, & non par elle-même, ne ſçauroit être répetée que $m-1$ de fois, donc le nombre de lettres à écrire en formant tous ces produits doit être $\overline{m \times m-1}$, donc le nombre de tous ces produits doit être $\frac{m \times \overline{m-1}}{2}$, & c'eſt-là la valeur de A ou du coefficient du troiſiéme terme de la formule cherchée.

Quant au coefficient du quatriéme terme, c'eſt-à-dire au nombre de produits à trois lettres abc, abd, acd, bcd, &c. que peuvent donner un nombre m de lettres a, b, c, d, &c. priſes de toutes les manieres poſſibles trois à trois, pour le trouver, nous remarquerons d'a-

bord que ce nombre doit être le tiers de celui des lettres qu'on écrit en formant tous ces produits.

Nous remarquerons enſuite que chacune de ces lettres doit être répetée le même nombre de fois, & que ce nombre doit être celui qui exprime combien de produits de deux lettres doivent donner toutes les autres lettres. Car il eſt évident que chaque lettre, *a* par exemple, doit être jointe à tous les produits *bc*, *bd*, *cd*, &c. des autres lettres priſes deux à deux.

Le nombre de fois que chacune des lettres *a*, *b*, *c*, *d*, &c. doit être répetée eſt donc celui qu'un nombre $m-1$ de lettres *b*, *c*, *d*, &c. donne de produits de deux lettres. Mais on vient de voir que lorſque le nombre des lettres étoit *m*, le nombre de leurs produits deux à deux étoit la moitié du nombre *m* multipliée par le nombre $m-1$ qui eſt moindre d'une unité, donc lorſque le nombre des lettres eſt $m-1$, il faut encore prendre la moitié $\frac{m-1}{2}$ de ce nombre, & la multiplier par $m-2$ qui eſt moindre d'une unité que $m-1$. C'eſt-à-dire que $\frac{\overline{m-1} \times \overline{m-2}}{2}$ eſt le nombre de fois que chacune des lettres *a*, *b*, *c*, &c. ſera répetée dans tous les produits en queſtion, & comme le nombre de ces lettres eſt *m*, $\frac{m \times \overline{m-1} \times \overline{m-2}}{2}$ ſera par conſéquent le nombre de toutes les lettres écrites, donc le nombre cherché des

produits à trois lettres *abc*, *abd*, &c. sera $\frac{m \times \overline{m-1} \times \overline{m-2}}{2 \times 3}$, & c'est-là la valeur de *B* ou du coefficient du quatriéme terme.

A l'égard du coefficient *C* du cinquiéme, c'est-à-dire du nombre de produits de quatre lettres que doit donner le nombre *m* de lettres, on trouvera de même qu'il doit être $\frac{m \times \overline{m-1} \times \overline{m-2} \times \overline{m-3}}{2 \times 3 \times 4}$, parce que ce nombre doit être le quart de toutes les lettres écrites dans ces produits, que chacune de ces lettres doit être répetée le même nombre de fois, & combinée avec tous les produits de trois lettres que donne le nombre $m-1$ de lettres, & que ces produits de trois lettres donnés par le nombre $m-1$ de lettres doit être .... $\frac{\overline{m-1} \times \overline{m-2} \times \overline{m-3}}{2 \times 3}$, par la même raison que $\frac{m \times \overline{m-1} \times \overline{m-2}}{2 \times 3}$ est celui des produits de trois lettres que fournit le nombre *m* de lettres.

Formant de même tous les autres coefficiens & substituant ensuite dans la formule précédente à la place de *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, &c. ainsi trouvées, on aura enfin $x^m + max^{m-1} +$

$$m\times\frac{\overline{m-1}}{2}\,a^2\,x^{m-2} + \frac{m\times\overline{m-1}\times\overline{m-2}}{2\times3}\,a^3\,x^{m-3}$$

$$+\frac{m\times\overline{m-1}\times\overline{m-2}\times\overline{m-3}}{2\times3\times4}\,a^4\,x^{m-4} +$$

$$\frac{m\times\overline{m-1}\times\overline{m-2}\times\overline{m-3}\times\overline{m-4}}{2\times3\times4\times5}\,a^5\,x^{m-5} +$$

&c. pour la puissance m de $x+a$.

Par la même raison la valeur de $\overline{p+q}^m$ dont on avoit besoin article XLVII. sera

Formule générale pour l'élevation de $p+q$ à la puissance m.

$$p^m + mqp^{m-1} + \frac{m\times\overline{m-1}}{2}\,q^2\,p^{m-2}$$

$$+\frac{m\times\overline{m-1}\times\overline{m-2}}{2\times3}\,q^3\,p^{m-3} + \&c.$$

XLIX.

Quant à celle de $\overline{p-q}^m$, il est évident que pour la trouver, il ne faudra que faire q négatif dans cette formule, ce qui la changera en

$$p^m - mqp^{m-1} + \frac{m\times\overline{m-1}}{2}\,q^2\,p^{m-2}$$

$$-\frac{m\times\overline{m-1}\times\overline{m-2}}{2\times3}\,q^3\,p^{m-3} + \&c.$$

L.

Si on veut présentement démontrer le théo- Démonstra-

tion du théorême de l'article XLVII.

rême de l'article XLVII. on commencera par remarquer que A eſt la ſomme de tous les termes p^m, $+\frac{m\times\overline{m-1}}{2}q^2p^{m-2}$,

$+\frac{m\times\overline{m-1}\times\overline{m-2}\times\overline{m-3}}{2\times3\times4}q^4p^{m-4}$, &c.

dans leſquels il n'entre aucune dimenſion impaire de q, & que B eſt la ſomme de tous les termes mqp^{m-1}, $\frac{m\times\overline{m-1}\times\overline{m-2}}{2\times3}q^3p^{m-3}$,

$\frac{m\times\overline{m-1}\times\overline{m-2}\times\overline{m-3}\times\overline{m-4}}{2\times3\times4\times5}q^5p^{m-5}$

&c. où q ne ſe trouve jamais qu'à une dimenſion impaire.

On verra enſuite que $A+B$ eſt la premiere formule, & $A-B$ la ſeconde, ce qui étoit le point où la difficulté étoit réduite, art. XLVII.

LI.

Application de la formule précédente à un exemple.

Lorſqu'on voudra employer la formule précédente à élever un binome quelconque à une puiſſance donnée, rien ne ſera plus facile; on n'aura qu'à ſubſtituer dans la valeur précédente de $\overline{p+q}^m$ à la place de p le premier terme du binome donné, à la place de q le ſecond, & à la place de m l'expoſant de la puiſſance à laquelle on veut élever le binome propoſé. Qu'on ſe propoſe, par exemple d'élever $3ac-2bd$ à

la cinquiéme puissance, je fais

$$3ac = p$$
$$-2bd = q$$
$$5 = m$$

& j'ai d'abord $p^m = \overline{3ac}^5 = 243\, a^5 c^5$.

$$mqp^{m-1} = 5 \times \overline{-2bd} \times \overline{3ac}^4$$
$$= -810\, a^4 bc^4 d.$$

$$\frac{m \times \overline{m-1}}{2} q^2 p^{m-2} = 10 \times 4bbdd \times \overline{3ac}^3$$
$$= 1080\, a^3 bbc^3 dd.$$

$$\frac{m \times \overline{m-1} \times \overline{m-2}}{2 \times 3} q^3 p^{m-3} = 10 \times \overline{-2bd}^3$$
$$\times \overline{3ac}^2 = -720 a^2 b^3 c^2 d^3.$$

$$\frac{m \times \overline{m-1} \times \overline{m-2} \times \overline{m-3}}{2 \times 3 \times 4} q^4 p^{m-4} = 5 \times \overline{-2bd}^4$$
$$\times \overline{3ac} = 240\, ab^4 cd^4.$$

$$\frac{m \times \overline{m-1} \times \overline{m-2} \times \overline{m-3} \times \overline{m-4}}{2 \times 3 \times 4 \times 5} q^5 p^{m-5}$$
$$= 1 \times \overline{-2bd}^5 \times \overline{3ac}^0 = -32 b^5 d^5.$$

A l'égard des autres termes, leurs coefficiens ayant tous pour un de leurs produisans $m-5$ qui est zero par la supposition de $m=5$, ils doivent tous être nuls; ainsi $\overline{3ac-2bc}^5$ aura

pour valeur $245\,a^5c^5 - 810\,a^4bc^4d + 1080\,a^3b^2c^3d^2 - 720\,a^2b^3c^2d^3 + 240\,a^4cd^4 - 32\,b^5d^5$.

LII.

Comment on applique la formule précédente aux quantités de plus de deux termes.

Lorſqu'on voudra élever, à une puiſſance donnée, une quantité composée de plus de deux termes, on le pourra encore facilement par la même méthode. Qu'il s'agiſſe, par exemple d'un trinome, en nommant p le premier terme de ce trinome, q la ſomme des deux autres, la difficulté de l'élevation du trinome ſera réduite à celle du binome, puiſque chacun des termes $mp^{m-1}q$, $\frac{m\times\overline{m-1}}{2}p^{m-2}q^2$ &c. ne renfermera pas de quantité à élever plus composée que des binomes.

Et lorſqu'on aura un polynome plus composé on réduira toujours la difficulté à l'élevation d'un polynome plus ſimple.

LIII.

Exemple.

Pour donner un exemple de la maniere dont on employe la formule précédente à l'élevation d'une quantité qui a plus de deux termes, ſoit proposé d'élever $a+2b-c$ à la quatriéme puiſſance; on fera $m=4$, $p=a$, $q=2b-c$, & ſubſtituant ces valeurs dans la formule on aura $p^m=a^4$, $mqp^{m-1}=4\times\overline{2b-c}\times a^3$ $=8a^3b-4a^3c$.

$$\frac{m\times\overline{m-1}}{2}q^2p^{m-2}=6\times\overline{-b2c}^2\times a^2=24a^2b^2$$
$$-24a^2bc+6a^2c^2,$$

$$\frac{m\times\overline{m-1}\times\overline{m-2}}{2\times3}q^3p^{m-3}=4\times\overline{2b-c}^3\times a$$
$$=32ab^3-48abbc+24abcc-4ac^3,$$

$$\frac{m\times\overline{m-1}\times\overline{m-2}\times\overline{m-3}}{2\times3\times4}q^4p^{m-4}$$
$$=\overline{2b-c}^4=16b^4-4\times\overline{2b}^3\times c$$
$$+\frac{4\times3}{2}\times\overline{2b}^2\times c^2-\frac{4\times3\times2}{2\times3}\times2b\times c^3$$
$$+\frac{4\times3\times2\times1}{2\times3\times4}c^4=16b^4-32b^3c+24bbcc$$
$$-8bc^3+c^4,$$

& partant $\overline{a+2b-c}^4=a^4+8a^3b-4a^3c+24a^2b^2-24a^2bc+6a^2c^2+32ab^3-48abbc+24abcc-4ac^3+16b^4-32b^3c+24bbcc-8bc^3+c^4$.

LIV.

Après avoir trouvé la formule précédente on ne pouvoit gueres tarder à ſoupçonner qu'elle devoit s'étendre à d'autres puiſſances que celles qui ſont des nombres entiers & po-

ſitifs. Il ſuffiſoit d'avoir reconnû qu'il y avoit d'autres puiſſances que celles-là pour vouloir y appliquer cette formule. Ayant reconnû, par exemple, qu'au lieu d'écrire $\sqrt[n]{a}$, on pouvoit mettre $a^{\frac{1}{n}}$, on aura imaginé auſſi-tôt que lorſqu'on vouloit prendre la racine n d'une quantité complexe quelconque repréſentée par $p+q$, on n'avoit qu'à faire $m=\frac{1}{n}$ dans la formule précédente, ou ce qui revient au même, on aura penſé que $p^{\frac{1}{n}}+\frac{1}{n}p^{\frac{1}{n}-1}q+\frac{\frac{1}{n}\times\frac{1}{n}-1}{2}p^{\frac{1}{n}-2}q^{2}+$ &c. devroit exprimer $\overline{p+q}^{\frac{1}{n}}$ ou la racine n de $p+q$.

De même on aura ſoupçonné qu'au lieu de $\frac{1}{\overline{p+q}^{n}}$ ou de $\overline{p+q}^{-n}$, on n'avoit qu'à faire $m=-n$ dans la même valeur de $\overline{p+q}^{m}$, ce qui donnoit . . . .
$p^{-n}-np^{-n-1}q-\frac{n\times\overline{-n-1}}{2}p^{-n-2}q^{2}-$ &c. En un mot l'ordre & la généralité qu'on avoit toujours trouvé dans les opérations analytiques devoit faire penſer que quoique la formule précédente n'eût été d'abord trouvée

qu'en ſuppoſant m entier & poſitif, elle pouvoit auſſi s'appliquer à toutes les autres valeurs de m. Mais ſi on trouvoit de la vraiſemblance à ce que cela fut ainſi, il s'en faut beaucoup qu'un Géometre put ſe contenter de cette vraiſemblance, tout l'effet qu'elle pouvoit faire ſur ſon eſprit étoit de l'engager à faire des efforts pour parvenir à une démonſtration. Voici une maniere de trouver cette démonſtration qu'il n'étoit pas bien difficile d'imaginer.

Où l'on fait voir que la formule précédente eſt encore bonne lorſque l'expoſant eſt fractionaire.

Soit propoſé premierement de faire voir que la formule en queſtion peut s'appliquer toutes les fois que m eſt une fraction quelconque poſitive ou ce qui revient au même, ſoit propoſé de prouver l'Equation A (voyez la Table I ci-jointe) laquelle devient l'Equation B en diviſant les deux membres par $p^{\frac{r}{n}}$ & en faiſant $\frac{q}{p} = z$.

Mais pour prouver l'Equation B, il ſuffit de faire voir qu'en élevant ſes deux membres à la même puiſſance n, il viendra des quantités égales, c'eſt-à-dire (en faiſant . . . .

$$s = \frac{r}{n} z + \frac{\frac{r}{n} \times \overline{\frac{r}{n} - 1}}{2} \times z^2$$

$$+ \frac{\frac{r}{n} \times \overline{\frac{r}{n} - 1} \times \overline{\frac{r}{n} - 2} +}{2 \times 3} \times z^3 \text{ \&c.})$$ qu'il s'agit de prouver l'Equation D.

Or comme r & n ſont deux nombres entiers on peut faire les élevations indiquées dans cette Equation par le moyen de la valeur générale de $\overline{p+q}^{m}$, ce qui donnera l'Equation E.

Le Problême étant réduit à prouver l'Equation E, il faut trouver par le moyen de la valeur de s, celles de s^2, s^3, s^4, &c. multiplier enſuite la valeur de s par n, celle de s^2 par $\frac{n\times\overline{n-1}}{2}$, celle de s^3 par $\frac{n\times\overline{n-1}\times\overline{n-2}}{2\times 3}$, celle de s^4 par $\frac{n\times\overline{n-1}\times\overline{n-2}\times\overline{n-3}}{2\times 3\times 4}$, &c. afin d'avoir les valeurs de tous les termes du ſecond membre de l'Equation E. Ces valeurs trouvées & écrites les unes ſous les autres, on formera l'Equation F qui, en faiſant les réductions que demande le ſecond membre, devient l'Equation G qui eſt la même que l'Equation E. Donc l'Equation A qui avoit donné cette Equation eſt prouvée. Donc il eſt vrai en général que la formule de l'art. XLVIII. s'applique auſſi-bien aux puiſſances fractionnaires quelconques poſitives qu'aux puiſſances entieres poſitives.

LV.

La même formule va encore aux puiſſances négatives.

Pour faire voir préſentement que la même formule s'applique également aux puiſſances négatives, ſoit entieres, ſoit fractionnaires, il s'agit de prouver (voyez la Table 2 ci-jointe) l'Equation A dont le ſecond membre eſt celui

que donne la formule de l'article XLVIII en faiſant $m = -\frac{r}{n}$.

Il eſt évident qu'au lieu de prouver l'Equation *A* on peut ſe contenter de prouver l'Equation *B* qui revient au même que la premiere en faiſant $z = \frac{q}{p}$, & multipliant les deux membres par $p^{-\frac{r}{n}}$.

Il eſt évident de plus qu'au lieu de la quantité $\overline{1+z}^{-\frac{r}{n}}$, on peut mettre $\frac{1}{\overline{1+z}^{\frac{r}{n}}}$, & que par conſéquent l'Equation *B* devient l'Equation *C*. Mais comme dans le premier membre de cette Equation, on peut mettre au lieu de $\overline{1+z}^{\frac{r}{n}}$ ſa valeur tirée de la formule de l'article LIV, il eſt clair qu'il ſuffit de prouver l'Equation *D*. Or pour prouver cette Equation, il ſuffit de multiplier le ſecond membre par le dénominateur du premier, & de s'aſſurer que le produit qui en vient eſt l'unité numérateur du premier membre, c'eſt ce qui arrive en effet, car faiſant la multiplication, il vient pour produit la quantité *E*, dont le premier terme qui eſt l'unité eſt le ſeul qui reſte après la réduction. Ainſi on eſt aſſuré préſentement, par une démonſtration, que la formule de l'article XLVIII. a toute la généralité qu'on ne faiſoit d'abord que lui ſoupçonner.

L V I.

Mais quelqu'aſſuré qu'on ſoit d'une vérité par une démonſtration générale, on ne ſçauroit gueres ſe défendre de chercher à la voir confirmée dans quelqu'application particuliere. Sçachant, par exemple, que la formule précédente eſt bonne pour l'élévation des quantités quelconques à des puiſſances fractionnaires, il eſt naturel qu'on veuille l'appliquer à quelque quantité qu'on ſçache avoir exactement une raci ne ou puiſſance fractionaire.

Exemple d'une racine quarrée priſe par la formule de l'élevation des puiſſances.

Soit par exemple la quantité $1+2b+b^2$ dont ont cherche la puiſſance $\frac{1}{2}$ ou ce qui revient au même la racine quarrée. Ayant fait $p=1$, $q=2b+b^2$, & $m=\frac{1}{2}$ dans la formule précédente, on trouvera . . . .

Le premier terme . . . . $p^m=1$

Le ſecond . . . . $mp^{m-1}q=b+\frac{1}{2}b^2$

Le 3eme, $\frac{m\times\overline{m-1}}{2}p^{m-2}q^2=-\frac{1}{2}b^2-\frac{1}{2}b^3-\frac{1}{8}b^4$.

Le 4eme, $\frac{m\times\overline{m-1}\times\overline{m-2}}{2\times 3}p^{m-3}q^3=\frac{1}{2}b^3+\frac{3}{4}b^4+\frac{3}{8}b^5+\frac{1}{16}b^6$.

Le 5eme, $\frac{m\times\overline{m-1}\times\overline{m-2}\times\overline{m-3}}{2\times 3\times 4}p^{m-4}q^4=-\frac{5}{8}b^4-\frac{5}{4}b^5-\frac{15}{16}b^6-\frac{5}{16}b^7-\frac{5}{128}b^8$.

Le

$$A\quad \overline{p+q}^{\frac{r}{n}} = p^{\frac{r}{n}} + \frac{r}{n}p^{\frac{r}{n}-1}q + \frac{\frac{r}{n}\times\overline{\frac{r}{n}-1}}{2}p^{\frac{r}{n}-2}q^2 + \frac{\frac{r}{n}\times\overline{\frac{r}{n}-1}\times\overline{\frac{r}{n}-2}}{2\times3}p^{\frac{r}{n}-3}q^3 + \frac{\frac{r}{n}\times\overline{\frac{r}{n}-1}\times\overline{\frac{r}{n}-2}\times\overline{\frac{r}{n}-3}}{2\times3\times4}p^{\frac{r}{n}-4}q^4 + \&c.$$

$$B\quad \overline{1+z}^{\frac{r}{n}} = 1 + \frac{r}{n}z + \frac{\frac{r}{n}\times\overline{\frac{r}{n}-1}}{2}z^2 + \frac{\frac{r}{n}\times\overline{\frac{r}{n}-1}\times\overline{\frac{r}{n}-2}}{2\times3}z^3 + \frac{\frac{r}{n}\times\overline{\frac{r}{n}-1}\times\overline{\frac{r}{n}-2}\times\overline{\frac{r}{n}-3}}{2\times3\times4}z^4 + \&c.$$

$$C\quad \overline{1+z}^{r} = \overline{1 + \frac{r}{n}z + \frac{\frac{r}{n}\times\overline{\frac{r}{n}-1}}{2}z^2 + \frac{\frac{r}{n}\times\overline{\frac{r}{n}-1}\times\overline{\frac{r}{n}-2}}{2\times3}z^3 + \frac{\frac{r}{n}\times\overline{\frac{r}{n}-1}\times\overline{\frac{r}{n}-2}\times\overline{\frac{r}{n}-3}}{2\times3\times4}z^4 + \&c.}^{\,n}$$

$$s = \frac{r}{n}z + \frac{\frac{r}{n}\times\overline{\frac{r}{n}-1}}{2}z^2 + \frac{\frac{r}{n}\times\overline{\frac{r}{n}-1}\times\overline{\frac{r}{n}-2}}{2\times3}z^3 + \frac{\frac{r}{n}\times\overline{\frac{r}{n}-1}\times\overline{\frac{r}{n}-2}\times\overline{\frac{r}{n}-3}}{2\times3\times4}z^4 + \&c.$$

$$D\quad \overline{1+z}^{r} = \overline{1+s}^{n}$$

$$E\quad 1 + rz + \frac{r\times\overline{r-1}}{2}z^2 + \frac{r\times\overline{r-1}\times\overline{r-2}}{2\times3}z^3 + \frac{r\times\overline{r-1}\times\overline{r-2}\times\overline{r-3}}{2\times3\times4}z^4 + \&c. = 1 + ns + \frac{n\times\overline{n-1}}{2}s^2 + \frac{r\times\overline{n-1}\times\overline{n-2}}{2\times3}s^3 + \frac{n\times\overline{n-1}\times\overline{n-2}\times\overline{n-3}}{2\times3\times4}s^4 + \&c.$$

$$F\quad \left\{\begin{array}{l} 1 \\ + ns \\ + \frac{n\times\overline{n-1}}{2}s^2 \\ + \frac{n\times\overline{n-1}\times\overline{n-2}}{2\times3}s^3 \\ + \frac{n\times\overline{n-1}\times\overline{n-2}\times\overline{n-3}}{2\times3\times4}s^4 \\ \quad + \&c. \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l} 1 \\ + n\times\frac{r}{n}z + n\times\frac{\frac{r}{n}\times\overline{\frac{r}{n}-1}}{2}z^2 + n\times\frac{\frac{r}{n}\times\overline{\frac{r}{n}-1}\times\overline{\frac{r}{n}-2}}{2\times3}z^3 + n\times\frac{\frac{r}{n}\times\overline{\frac{r}{n}-1}\times\overline{\frac{r}{n}-2}\times\overline{\frac{r}{n}-3}}{2\times3\times4}z^4 + \&c. \\ + \frac{n\times\overline{n-1}}{2}\times\frac{r^2}{n^2}z^2 + \frac{n\times\overline{n-1}}{2}\times\frac{r^2}{n^2}\times\overline{\frac{r}{n}-1}\,z^3 + \frac{n\times\overline{n-1}}{2}\times\frac{r^2}{n^2}\times\overline{\frac{r}{n}-1}\times\frac{\overline{\frac{7r}{n}-11}}{12}z^4 + \&c. \\ + \frac{n\times\overline{n-1}\times\overline{n-2}}{2\times3}\times\frac{r^3}{n^3}z^3 + \frac{n\times\overline{n-1}\times\overline{n-2}}{2\times3}\times\frac{3r^3}{2n^3}\times\overline{\frac{r}{n}-1}\,z^4 + \&c. \\ + \frac{n\times\overline{n-1}\times\overline{n-2}\times\overline{n-3}}{2\times3\times4}\times\frac{r^4}{n^4}z^4 + \&c. \\ + \&c. \end{array}\right\}$$

$$G\quad 1 + ns + \frac{n\times\overline{n-1}}{1}s^2 + \frac{n\times\overline{n-1}\times\overline{n-2}}{2\times3}s^3 + \frac{n\times\overline{n-1}\times\overline{n-2}\times\overline{n-3}}{2\times3\times4}s^4 + \&c. = 1 + rz + \frac{r\times\overline{r-1}}{2}z^2 + \frac{r\times\overline{r-1}\times\overline{r-2}}{2\times3}z^3 + \frac{r\times\overline{r-1}\times\overline{r-2}\times\overline{r-3}}{2\times3\times4}z^4\ \&c.$$

$$A\quad \overline{p+q}^{-\frac{r}{n}} = p^{-\frac{r}{n}} - \frac{r}{n}p^{-\frac{r}{n}-1}q + \frac{\frac{r}{n}\times\overline{\frac{r}{n}+1}}{2}p^{-\frac{r}{n}-2}q^2 - \frac{\frac{r}{n}\times\overline{\frac{r}{n}+1}\times\overline{\frac{r}{n}+2}}{2\times3}p^{-\frac{r}{n}-3}q^3 + \frac{\frac{r}{n}\times\overline{\frac{r}{n}+1}\times\overline{\frac{r}{n}+2}\times\overline{\frac{r}{n}+3}}{2\times3\times4}p^{-\frac{r}{n}-4}q^4 + \&c.$$

$$B\quad \overline{1+z}^{-\frac{r}{n}} = 1 - \frac{r}{n}z + \frac{\frac{r}{n}\times\overline{\frac{r}{n}+1}}{2}z^2 - \frac{\frac{r}{n}\times\overline{\frac{r}{n}+1}\times\overline{\frac{r}{n}+2}}{2\times3}z^3 + \frac{\frac{r}{n}\times\overline{\frac{r}{n}+1}\times\overline{\frac{r}{n}+2}\times\overline{\frac{r}{n}+3}}{2\times3\times4}z^4 + \&c.$$

$$C\quad \frac{1}{\overline{1+z}^{\frac{r}{n}}} = 1 - \frac{r}{n}z + \frac{\frac{r}{n}\times\overline{\frac{r}{n}+1}}{2}z^2 - \frac{\frac{r}{n}\times\overline{\frac{r}{n}+1}\times\overline{\frac{r}{n}+2}}{2\times3}z^3 + \frac{\frac{r}{n}\times\overline{\frac{r}{n}+2}\times\overline{\frac{r}{n}+1}\times\overline{\frac{r}{n}+3}}{2\times3\times4}z^4 + \&c.$$

$$D\quad \frac{1}{1+\frac{r}{n}z+\frac{\frac{r}{n}\times\overline{\frac{r}{n}-1}}{2}z^2+\frac{\frac{r}{n}\times\overline{\frac{r}{n}-1}\times\overline{\frac{r}{n}-2}}{2\times3}z^3+\frac{\frac{r}{n}\times\overline{\frac{r}{n}-1}\times\overline{\frac{r}{n}-2}\times\overline{\frac{r}{n}-3}}{2\times3\times4}z^4\ \&c.} = 1 - \frac{r}{n}z + \frac{\frac{r}{n}\times\overline{\frac{r}{n}+1}}{2}z^2 - \frac{\frac{r}{n}\times\overline{\frac{r}{n}+1}\times\overline{\frac{r}{n}+2}}{2\times3}z^3 + \frac{\frac{r}{n}\times\overline{\frac{r}{n}+1}\times\overline{\frac{r}{n}+2}\times\overline{\frac{r}{n}+3}}{2\times3\times4}z^4 + \&c.$$

$$E\quad 1 - \frac{r}{n}z + \frac{\frac{r}{n}\times\overline{\frac{r}{n}+1}}{2}z^2 - \frac{\frac{r}{n}\times\overline{\frac{r}{n}+1}\times\overline{\frac{r}{n}+2}}{2\times3}z^3 + \frac{\frac{r}{n}\times\overline{\frac{r}{n}+1}\times\overline{\frac{r}{n}+2}\times\overline{\frac{r}{n}+3}}{2\times3\times4}z^4 - \&c.$$

$$+\frac{r}{n}z^2 - \frac{r}{n}\times\frac{r}{n}z^2 \quad + \frac{\frac{r}{n}\times\frac{r}{n}\times\overline{\frac{r}{n}+1}}{2}z^3 \quad - \frac{\frac{r}{n}\times\frac{r}{n}\times\overline{\frac{r}{n}+1}\times\overline{\frac{r}{n}+2}}{2\times3\times4}z^4 + \&c.$$

$$+\frac{\frac{r}{n}\times\overline{\frac{r}{n}-1}}{2}z^2 - \frac{\frac{r}{n}\times\frac{r}{n}\times\overline{\frac{r}{n}-1}}{2}z^3 + \frac{\frac{r}{n}\times\frac{r}{n}\times\overline{\frac{r}{n}+1}\times\overline{\frac{r}{n}-1}}{2\times2}z^4 + \&c.$$

$$+\frac{\frac{r}{n}\times\overline{\frac{r}{n}-1}\times\overline{\frac{r}{n}-2}}{2\times3}z^3 - \frac{\frac{r}{n}\times\frac{r}{n}\times\overline{\frac{r}{n}-1}\times\overline{\frac{r}{n}-2}}{2\times3}z^4 + \&c.$$

$$+\frac{\frac{r}{n}\times\overline{\frac{r}{n}-1}\times\overline{\frac{r}{n}-2}\times\overline{\frac{r}{n}-3}}{2\times3\times4}z^4 - \&c.$$

$$+\&c.$$

Le 6eme, &c. & c'eſt la ſomme de tous ces termes qui doit être la racine cherchée.

A l'inſpection de cette quantité, on a de la peine à croire qu'elle puiſſe ſe réduire à $1+b$ qu'on ſçait être la racine cherchée. Mais la généralité de la démonſtration précédente, & une certaine expérience de calcul aſſurent bien-tôt de cette réduction.

En ajoutant tous ces termes, on remarque que le premier 1 reſte tout entier; que le ſecond $b+\frac{1}{2}b^2$ ſe réduit à b, parce que la partie $\frac{1}{2}b^2$ de ce ſecond terme eſt détruite par la même quantité en négatif contenue dans le troiſiéme terme $-\frac{1}{2}b^2-\frac{1}{2}b^3-\frac{1}{8}b^4$; que ce qui reſte du troiſiéme terme $-\frac{1}{2}b^3-\frac{1}{8}b^4$, après la deſtruction de $\frac{1}{2}b^2$ eſt entierement détruit auſſi par le quatriéme $\frac{1}{2}b^3+\frac{3}{4}b^4+\frac{3}{8}b^5+\frac{1}{16}b^6$ dont il ne reſte plus alors que $\frac{5}{8}b^4+\frac{3}{8}b^5+\frac{1}{16}b^6$ & ce reſte du quatriéme terme ſe trouve détruit de même par le cinquiéme terme, & en pouſſant les réductions plus loin, on voit que rien ne reſte de toute la quantité que $1+b$, ainſi qu'il devoit arriver.

LVII.

Outre que cet exemple & tous ceux de même nature, qu'il eſt aiſé de faire, confirment, pour ainſi dire par expérience, la propoſition démontrée, article LI. ils montrent en même-tems une utilité réelle qu'a cette propoſition, en donnant un moyen d'extraire les racines des quantités qui ſont des puiſſances

Lorſque les quantités n'ont point de racines exactes ou en

trouve d'approchées par la méthode précédente.

complettes. Mais il y a bien d'autres avantages à retirer de cette proposition. Lorsque la quantité dont on voudra prendre une racine n'en aura point d'exacte, on en aura une approchée par la formule précédente.

Exemple.

Qu'on cherche, par exemple, la racine 5eme de la quantité $a+b$. En substituant la plus grande des deux parties de cette quantité qu'on suppose être a à la place de p, & substituant la plus petite b à la place de q & $\frac{1}{5}$ à la place de m, on aura pour la racine cherchée

Ce que c'est qu'une série ou suite infinie.

$$a^{\frac{1}{5}} + \frac{1}{5} a^{-\frac{4}{5}} b - \frac{1\times4}{2\times25} a^{-\frac{9}{5}} b^2 + \frac{1\times4\times9}{2\times3\times125} a^{-\frac{14}{5}} b^3 - \frac{1\times4\times9\times14}{2\times3\times4\times625} a^{-\frac{19}{5}} b^4 + \frac{1\times4\times9\times14\times19\, a^{-\frac{24}{5}} b^5}{2\times3\times4\times5\times3125}$$

— &c. ou $a^{\frac{1}{5}} \times \overline{1 + \frac{b}{5a} - \frac{2bb}{25aa} + \frac{6b^3}{125a^3} - \frac{21b^4}{625a^4}}$ + &c.

Or quoique ce ne soit qu'en formant de la même maniere une infinité de termes, qu'on puisse être assuré que la quantité précédente qui est de celles qu'on appelle suites ou series infinies, exprime exactement la racine cherchée; en se contentant néanmoins de prendre un grand nombre de ces termes, on approche extrêmement de la vraie racine cherchée. S'il arrive même que a soit considérablement plus grand que b, on n'a pas besoin de beaucoup de termes pour approcher sensiblement de la vraye racine.

Qu'on suppose, par exemple, $b = \frac{1}{10} a$, on

aura pour les ſix premiers termes de la ſuite précédente

$$a^{\frac{1}{5}}\times\overline{1+\frac{1}{50}-\frac{1}{1250}+\frac{3}{62500}-\frac{21}{6250000}+\frac{399}{1562500000}}$$

Or ſi on fait attention à la conſidérable diminution ſucceſſive de ces ſix termes, on voit que les termes qu'on pourroit écrire de plus ſeroient ſi petits qu'ils ne valent pas la peine d'être cherchés.

LVIII.

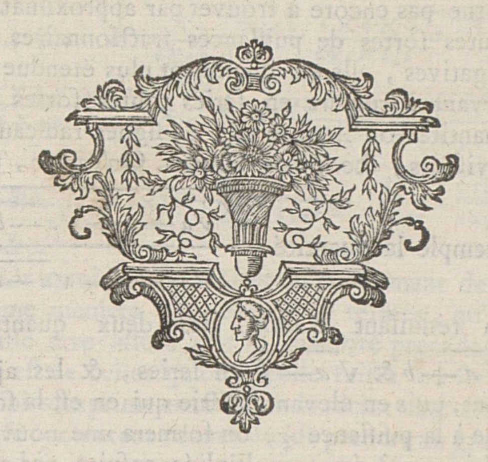
L'utilité de la formule des puiſſances ne ſe borne pas encore à trouver par approximation toutes ſortes de puiſſances fractionnaires ou négatives, elle eſt infiniment plus étendue en ſervant à réduire en ſeries toutes ſortes de quantités où il entre tant de ſignes radicaux, diviſeurs, &c. qu'on voudra. Qu'on ait, par exemple la quantité $\frac{\sqrt[4]{\sqrt[3]{a+b}+\sqrt{a-b}}}{\sqrt[5]{a+b}-\sqrt{a-b}}$, en réduiſant d'abord les deux quantités $\sqrt[3]{a+b}$ & $\sqrt[3]{a-b}$ en ſeries, & les ajoutant, puis en élevant la ſérie qui en eſt la ſomme à la puiſſance $\frac{1}{4}$, on formera une nouvelle ſérie, qui étant multipliée enſuite par celle qu'on trouveroit de même pour ....

$$\overline{\sqrt[5]{a+b}-\sqrt[5]{a-b}}\ \text{ou}\ \overline{\sqrt[5]{a+b}-\sqrt[5]{a-b}}^{\,-1}$$

donneroit enfin une ſeule ſérie pour exprimer la quantité propoſée. Or outre qu'on a ainſi

Toutes ſortes de quantités peuvent être réduites en ſéries par la formule précédente.

par approximation, toutes ces quantités composées de radicaux & de diviſeurs complexes, il y a une infinité de cas où il eſt très-utile, pour des démonſtrations, que ces quantités ſoient délivrées de tous ces radicaux & diviſeurs complexes, ainſi qu'elles le ſont par leurs transformations en ſéries, mais il eſt tems de retourner à la réſolution des Equations.





ELEMENS D'ALGEBRE.

CINQUIE'ME PARTIE.

Résolution des Equations du troisiéme & du quatriéme dégré.

LORSQU'ON aura voulu passer de la résolution des Equations exprimées généralement par $ax^m = b$ & $ax^{2m} + bx^m = c$ à celles qui contenoient outre ces termes, les intermédiaires, on a bien-tôt senti des difficultés qui ont fait abandonner l'espérance de résoudre ces Equations en général. On n'a pû encore parvenir qu'à la solution de celles du troisiéme & du quatriéme dégré, encore la méthode

qu'on a trouvé pour les résoudre, souffre-t'elle une exception considérable ; voici le chemin qu'on a pû suivre en découvrant cette méthode.

I.

Equation du troisiéme dégré la plus composée.

Soient représentées par l'Equation $y^3 + dy^2 + ey + f = o$ toutes celles du troisiéme dégré. Si on pouvoit réduire cette Equation à une autre qui n'eut que le premier, & que le dernier terme, il est évident que ce seroit l'avoir résolue. Or quel est le moyen le plus naturel de transformer une Equation en une autre, dans laquelle on soit libre de faire quelque changement, c'est de substituer dans cette Equation à la place de l'inconnue quelque quantité, dans laquelle on laisse une lettre indéterminée, afin de pouvoir s'en servir à volonté.

II.

Transformation par laquelle on fait évanouir un terme quelconque de cette Equation.

Soit donc substitué dans cette Equation au lieu de y, $x+r$, nous aurons $x^3 + \overline{3r+d} \times xx + \overline{3rr+2dr+e} \times x + r^3 + dr^2 + er + f = o$ que l'on écrit aussi de cette maniere

$$\begin{array}{llll} x^3 + 3rx^2 & + 3rrx & + r^3 & = o \\ \quad\; + d & + 2dr & + dr^2 & \\ & + e & + er & \\ & & + f & \end{array}$$

Comme on est le maître de r dans cette Equation, il est aisé de voir qu'on peut par son moyen faire évanouir celui des termes qu'on

voudra, mais auſſi on n'en ſçauroit faire diſparoître qu'un à la fois.

Qu'on faſſe, par exemple $3r + d = 0$ ou $r = -\frac{1}{3}d$, le ſecond terme s'évanouira, & l'Equation deviendra

$$\begin{array}{lll} x^3 + & ex & + \frac{2}{27}d^3 = 0 \\ & -\frac{1}{3}dd & -\frac{de}{3} \\ & & + f \end{array}$$

Si on fait au contraire $3rr + 2dr + e = 0$ ou $r = -\frac{1}{3}d \pm \sqrt{-\frac{e}{3} + \frac{1}{9}dd}$, le troiſiéme terme s'évanouira, mais les deux autres reſteront.

Si on vouloit faire évanouir le dernier terme, il faudroit faire $r^3 + dr^2 + er + f = 0$, & alors pour avoir r, il faudroit réſoudre une Equation pareille à la propoſée.

Avec un peu de connoiſſance du calcul, on devoit bien s'attendre que la ſubſtitution de $x + r$ à la place de y ne pouvoit pas faire évanouir pluſieurs termes à la fois, parce que l'introduction d'une inconnue ne peut ſervir qu'à réſoudre une ſeule Equation, ou ce qui revient au même, à remplir une condition; or l'évanouiſſement de chaque terme fait une condition. Mais ſi par cette transformation on n'eſt pas parvenu entierement au but que l'on avoit eu de réduire l'Equation propoſée à deux termes, on a du moins changé la queſtion en une nouvelle qui paroît plus ſimple, puiſqu'il ne s'agit plus que d'une Equation à trois termes.

Des deux Equations transformées qu'on peut avoir en faiſant évanouir, ou le premier, ou le ſecond terme, la premiere, c'eſt-à-dire,

$$x^3 + ex + \frac{2}{27}d^3 = 0$$
$$- \frac{1}{3}d^2 \quad - \frac{de}{3}$$
$$+ f$$

eſt la plus ſimple, auſſi eſt-ce celle que nous allons chercher à réſoudre en tâchant de diminuer encore ſes termes, mais nous ſuſpendrons un moment cette recherche, parce que la méthode qu'on vient d'employer pour transformer les Equations du troiſiéme dégré offre ſi naturellement de nouvelles vérités ſur les Equations de tous les autres dégrés, qu'il eſt à propos de s'y arrêter un peu.

III.

On voit d'abord qu'à l'aide de la même transformation de y en $x + r$, on peut faire auſſi évanouir le terme qu'on voudra d'une Equation d'un dégré quelconque.

Transformation précédente appliquée à une Equation du quatriéme dégré.

Qu'on ait par exemple l'Equation du quatriéme dégré la plus générale $y^4 + ay^3 + by^2 + cy + d = 0$, en y mettant $x + r$ au lieu de y, on aura

$$\begin{array}{lllll} x^4 + 4rx^3 & + 6r^2x^2 & + 4r^3x & + r^4 & = 0 \\ \quad + a & + 3ar & + 3ar^2 & + ar^3 & \\ & + b & + 2br & + brr & \\ & & + c & + cr & \\ & & & + d & \end{array}$$

dans laquelle faiſant $4r + a = 0$ ou $r = - \frac{1}{4}a$,

on aura une Equation du quatriéme dégré qui n'aura point de ſecond terme.

De même en déterminant r par l'Equation du ſecond dégré $6r^2 + 3ar + b = 0$, on aura une Equation du quatriéme dégré qui n'aura point de troiſiéme terme. Et en faiſant r tel qu'il conviendroit pour réſoudre l'Equation du 3e dégré dégré $4r^3 + 3ar^2 + 2br + c = 0$, on auroit une Equation du 4eme dégré qui n'auroit point de quatriéme terme. Le cinquiéme s'en iroit de même par le moyen d'une Equation du 4eme dégré. Mais on ne s'arrête pas ordinairement à faire évanouir d'autres termes que le ſecond, parce que l'évanouiſſement des autres termes amene preſque toujours des calculs compliqués de radicaux & fort pénibles.

Ce n'eſt ordinairement que le ſecond terme qu'on fait évanouir.

IV.

Dans une Equation générale du cinquiéme dégré $y^5 + ay^4 + by^3 + cy^2 + dy + e = 0$ la transformée $y = x + r$ donne l'Equation $x^5 + 5rx^4 + $ &c. dont le ſecond terme s'é-
$ + a$
vanouira par l'Equation du premier dégré $5r + a = 0$ ou $r = -\frac{1}{5}a$.

Evanouiſſement du ſecond terme dans une Equation du cinquiéme dégré.

V.

Et en général dans une Equation d'un dégré quelconque m repréſentée par $x^m + ax^{m-1} + bx^{m-2} + $ &c. $= 0$ il ſera aiſé de trouver par la formule des puiſſances donnée dans la IVeme Partie, article XLVIII. que le ſecond terme s'évanouira en faiſant l'inconnue $x = y - \frac{a}{m}$.

Dans une Equation du dégré quelconque m.

V I.

Résolution de l'Equation générale $x^3 + pu + q = o$.

Après cette petite digreſſion, remettons-nous à chercher la ſolution de l'Equation du troiſiéme dégré

$$x^3 + ex + \frac{2}{27} d^3 = o$$
$$- \frac{1}{3} d^2 \quad - \frac{de}{3}$$
$$+ f$$

à laquelle l'Equation générale $y^3 + dy^2 + ey + f = o$ s'étoit réduite par la ſuppoſition de $y = x - \frac{1}{3} d$, & pour abréger les calculs, écrivons-là ainſi, $x^3 + px + q = o$.

En ſuivant l'idée que nous avons déja employée, faiſons encore une transformée, ſubſtituons, par exemple $u + z$ à la place de x; non dans la vûe de faire évanouir un terme de cette Equation, ainſi qu'on avoit fait la premiere fois, car on verroit bien-tôt que le terme qui avoit diſparu reviendroit, mais pour chercher à décompoſer cette Equation en de plus ſimples. Sans voir diſtinctement qu'un tel moyen doit réuſſir, on ſent bien que la transformation d'une Equation en une autre où l'on a une lettre à déterminer à volonté ne peut gueres manquer d'être utile.

La ſubſtitution de $x = u + z$ étant faite, on a $u^3 + 3uuz + 3uzz + z^3 + pu + pz + q = o$. Suppoſons maintenant que l'une des inconnues u ou z ſoit telle que $u^3 + z^3 + q = o$, on aura en ce cas l'Equation $3u^2z + 3uz^2 + pu + pz = o$, de laquelle on tire aiſément en la diviſant par $u + z$, $3uz + p = o$ ou

$u = -\frac{p}{3z}$. Voilà donc de quoi chasser facilement une des inconnues introduites, il ne s'agit plus que de sçavoir quelle sera l'Equation qui déterminera l'autre inconnue. Pour cela, il faut remettre cette valeur de u dans la premiere Equation $u^3+z^3+q=0$, ce qui donnera $-\frac{p^3}{27z^3}+z^3+q=0$, ou $z^6+qz^3 = \frac{p^3}{27}$, or cette Equation quoique plus élevée que la proposée, est cependant bien plus aisée à résoudre, car elle est de la classe de celles que nous avons résolues dans la quatriéme Partie, article xx. & la valeur qu'elle donne pour z est $\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q \pm \sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}}$.

Donc u ou $-\frac{p}{3z}$ sera $\frac{-\frac{1}{3}p}{\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q \pm \sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}}}$

qui se réduit facilement à $-\sqrt[3]{\frac{1}{2}q \pm \sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}}$; car on peut voir assez facilement que le produit de $-\frac{1}{2}q \pm \sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}$ par $+\frac{1}{2}q \pm \sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}$ est $\frac{1}{27}p^3$, & partant que $\frac{1}{3}p$ est le produit des racines cubes de ces quantités. Ajoutons présentement ces valeurs de u & de z, & nous aurons $u+z$ ou. . . . . .

. . . . $x = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q \pm \sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}}$ $-\sqrt[3]{+\frac{1}{2}q \pm \sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}}$ ou simplement

. . . . $x = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}}$

$-\sqrt[3]{+\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}}$, car en prenant le radical $\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}$ en $-$, on n'a pas une valeur de x différente de celle qu'on a en le prenant en $+$.

VII.

La formule précédente ne donne qu'une des trois racines.

Par cette valeur de x, on voit qu'il n'en eſt pas des Equations du troiſiéme dégré comme de celles du ſecond, où la même expreſſion d'une racine marquoit à l'aide du ſigne $\pm$ les deux racines à la fois ; ici on trouve une expreſſion qui ne ſçauroit déſigner qu'une des trois valeurs de x.

Maniere d'avoir les deux autres.

Pour trouver les deux autres, il faut diviſer l'Equation $x^3+px+q=0$ par la racine que donne la valeur précédente de x, & la réſolution de l'Equation du ſecond dégré qui en ſera le quotient donnera les deux autres racines cherchées.

Si on veut trouver la valeur générale de ces deux racines, il faut faire pour abréger les calculs $\sqrt[3]{\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}qq+\frac{1}{27}p^3}}=m$, & $\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}qq+\frac{1}{27}p^3}}=n$, & faire attention qu'en ce cas $mn=\frac{1}{3}p$ & $m^3-n^3=q$. Cela poſé, la diviſion de l'Equation $x^3+px+q=0$ par $x+m-n$, qui eſt alors la racine qu'on vient de trouver, donnera pour quotient $xx+nx-mx+mm+nn+mn=0$ dont les deux racines, c'eſt-à-dire les deux racines cherchées de l'Equation $x^3+px+q=0$ ſont

$$x = \frac{m-n}{2} \pm \tfrac{1}{2} \times \overline{m+n} \sqrt{-3} \text{ ou} \ldots\ldots$$

$$x = \tfrac{1}{2}\sqrt[3]{\tfrac{1}{2}q + \sqrt{\tfrac{1}{4}qq + \tfrac{1}{27}p^3}} - \tfrac{1}{2}\sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q + \sqrt{\tfrac{1}{4}qq + \tfrac{1}{27}p^3}}$$

$$\pm \overline{\tfrac{1}{2}\sqrt[3]{\tfrac{1}{2}q + \sqrt{\tfrac{1}{4}qq + \tfrac{1}{27}p^3}} + \tfrac{1}{2}\sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q + \sqrt{\tfrac{1}{4}qq + \tfrac{1}{27}p^3}}} \times \sqrt{-3}$$

qui ſont néceſſairement imaginaires toutes les fois que $\sqrt{\tfrac{1}{4}q^2 + \tfrac{1}{27}p^3}$ eſt une quantité réelle. On auroit pû reconnoître dès l'article V, de la quatriéme Partie, où il n'étoit queſtion que des Equations à deux termes, l'eſpece d'imperfection que donne à la ſolution des Equations du troiſiéme dégré, la différence de forme des trois racines, mais cette eſpece d'imperfection eſt ici plus frappante en ſe trouvant dans la ſolution générale.

VIII.

Ce déſavantage de la ſolution précédente des Equations du troiſiéme dégré n'en peut paroître un qu'à ceux qui conſiderent, pour ainſi dire, métaphyſiquement l'Algebre, mais il y en a un autre bien plus frappant pour tout le monde, & qui a extrêmement exercé tous les Calculateurs. C'eſt que cette ſolution n'apprend rien du tout pour la valeur de x toutes les fois que $\tfrac{1}{27}p^3$ eſt plus grand que $\tfrac{1}{4}qq$, & qu'il eſt en même-tems négatif. Dans ce cas qui eſt très-étendu, la valeur de la quantité $\sqrt{\tfrac{1}{27}p^3 + \tfrac{1}{4}q^2}$ eſt imaginaire, & par conſéquent les deux quantités . . . .

Cas où la formule précédente ne ſçauroit faire connoître x, à cauſe des imaginaires qu'elle renferme.

$\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}}$ &........

$-\sqrt[3]{\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}}$ qui compoſent la valeur de x ſont imaginaires auſſi, mais on n'en ſçauroit conclure pour cela que la valeur de x ſoit imaginaire, ce qui bien loin d'être regardé comme un vice de la ſolution, la rendroit une ſolution complette; & on ne ſçauroit non plus, du moins par les méthodes connues juſqu'à préſent, déterminer quelle eſt la quantité réelle qu'exprime cette valeur de x.

IX.

Non-ſeulement on ne ſçauroit conclure de l'expreſſion que x a dans ce cas que la racine cherchée eſt imaginaire, mais on s'eſt aſſuré par divers moyens que cette valeur étoit toujours réelle alors, voici de tous ces moyens celui * qui m'a paru le plus direct.

On démontre cependant que dans ce cas x eſt réel.

Soit repris la valeur $\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}}$ $-\sqrt[3]{\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}}$ de x; mettons à la place de $\frac{1}{2}q$, a & à la place de ..... $\sqrt{\frac{1}{4}qq+\frac{1}{27}p^3}$ ſuppoſé imaginaire, $b\sqrt{-1}$, on aura $x=\sqrt[3]{-a+b\sqrt{-1}}-\sqrt[3]{a+b\sqrt{-1}}$.

Cherchons maintenant les valeurs de $\sqrt[3]{-a+b\sqrt{-1}}$ & de $-\sqrt[3]{a+b\sqrt{-1}}$ par la

* Je l'ai tiré d'un Mémoire de M. Nicole. Mem. de l'Acad. année 1738. p. 99. & 100.

formule donnée dans la quatriéme Partie, article XLVIII. pour l'élevation du binome.

Nous aurons pour la premiere de ces deux quantités $-a^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{3}a^{-\frac{2}{3}}b\sqrt{-1} - \frac{1}{9}a^{-\frac{5}{3}}b^2 - \frac{5}{81}a^{-\frac{8}{3}}b^3\sqrt{-1} + \frac{10}{243}a^{-\frac{11}{3}}b^4 + \&c.$

Et pour la seconde,
$-a^{\frac{1}{3}} - \frac{1}{3}a^{-\frac{2}{3}}b\sqrt{-1} - \frac{1}{9}a^{-\frac{5}{3}}b^2 + \frac{5}{81}a^{-\frac{8}{3}}b^3\sqrt{-1} + \frac{10}{243}a^{-\frac{11}{3}}b^4 - \&c.$ & par conséquent la valeur de x sera la suite infinie $-2a^{\frac{1}{3}} - \frac{2}{9}a^{-\frac{5}{3}}b^2 + \frac{20}{243}a^{-\frac{11}{3}}b^4 - \frac{308}{6561}a^{-\frac{17}{3}}b^6 + \&c.$ ou

$$-2a^{\frac{1}{3}} \times \overline{1 + \frac{b^2}{9a^2} - \frac{10b^4}{243a^4} + \frac{154b^6}{6561a^6} - \&c.}$$

qui ne contient aucune racine imaginaire; ainsi dans le cas où $\frac{1}{27}p^3$ est négatif & plus grand que $\frac{1}{4}qq$ la valeur $\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{27}p^3 + \frac{1}{4}q^2}} - \sqrt[3]{\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{27}p^3 + \frac{1}{4}q^2}}$ de x qui est alors sous une forme imaginaire, est cependant une quantité toujours réelle. Malheureusement on n'a pû encore jusqu'à présent lui trouver une forme réelle qu'en admettant, ainsi qu'on vient de faire, une infinité de termes dans son expression, ce qui ne peut servir qu'à prouver que cette valeur est réelle, mais non à la faire connoître exactement.

X.

Par la même méthode on trouvera une valeur approchée de x.

Si on veut se contenter d'une approximation, on pourra faire usage de la série précédente, car en supposant a plus grand que b, les termes de cette série iront en diminuant, & par conséquent on pourra négliger les derniers quand ils seront parvenus à n'être que de très-petites quantités. S'il arrive au contraire que a soit plus petit que b, il faudra en employant la formule du binome pour trouver $\sqrt[3]{-a+b\sqrt{-1}}$ & $\sqrt[3]{a+b\sqrt{-1}}$, avoir l'attention de prendre $b\sqrt{-1}$ pour le premier terme du binome, & a pour le second; & l'on aura alors pour la valeur de x ou de $\sqrt[3]{-a+b\sqrt{-1}} - \sqrt[3]{a+b\sqrt{-1}}$ la quantité $+\frac{2}{3}b^{-\frac{2}{3}}a - \frac{10}{81}b^{-\frac{8}{3}}a^3 + \frac{44}{729}b^{-\frac{14}{3}}a^5 - \frac{748}{19683}b^{-\frac{20}{3}}a^7 +$ &c. ou ....

$$-\frac{2a}{3b^{\frac{2}{3}}} \times \overline{-1 + \frac{5a^2}{27b^2} - \frac{22a^4}{243b^4} + \frac{374a^6}{6561b^6} - \&c.}$$

qui est aussi réelle que l'autre expression, & dont tous les termes décroissent quand a est plus petit que b.

XI.

Les deux autres valeurs d'x sont aussi réelles dans le même cas.

Nous avons vû article VII. que des trois racines de l'Equation $x^3+px+q=0$ celles qui sont exprimées par .... $x=$

$$\tfrac{1}{2}\sqrt[3]{\tfrac{1}{2}q+\sqrt{\tfrac{1}{4}qq+\tfrac{1}{27}p^3}} - \tfrac{1}{2}\sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q+\sqrt{\tfrac{1}{4}qq+\tfrac{1}{27}p^3}}$$

$\pm$

$\pm\frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}}+\frac{1}{2}\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}qq+\frac{1}{27}p^3}}\times\sqrt{-3}$

ſont toutes deux imaginaires toutes les fois que $\sqrt{\frac{1}{4}qq+\frac{1}{27}p^3}$ étoit une quantité réelle. Nous allons voir préſentement que ces deux racines ſont toujours réelles toutes les fois que $\sqrt{\frac{1}{4}qq+\frac{1}{27}p^3}$ eſt imaginaire, c'eſt-à-dire, toutes les fois que p eſt négatif, & tel que $\frac{1}{27}p^3$ eſt plus grand que $\frac{1}{4}qq$.

Car ſi on change à l'aide des dénominations qu'on vient d'employer l'expreſſion de ces deux valeurs de x en . . . .

$\frac{1}{2}\sqrt[3]{-a+b\sqrt{-1}}-\frac{1}{2}\sqrt[3]{a+b\sqrt{-1}}$

$\pm\frac{1}{2}\sqrt[3]{a+b\sqrt{-1}}+\frac{1}{2}\sqrt[3]{-a+b\sqrt{-1}}\times\sqrt{-3}$

& qu'on réduiſe ainſi qu'on vient de faire les quantités $\sqrt[3]{-a+b\sqrt{-1}}$ & $\sqrt[3]{a+b\sqrt{-1}}$ en ſéries, on aura pour ces deux valeurs de x

$$a^{\frac{1}{3}}\times\overline{1+\frac{bb}{9aa}-\frac{10b^4}{243a^4}+\frac{154b^6}{6561a^6}-\&c.}$$

$$\pm\frac{b}{a^{\frac{2}{3}}\sqrt{3}}\times\overline{1-\frac{5bb}{27aa}+\frac{22b^4}{243a^4}-\frac{374b^6}{6561a^6}+\&c.}$$

expreſſion entierement réelle.

XII.

Comme l'Equation la plus générale du troiſiéme dégré repréſentée par $y^3+dy^2+ey+f=0$ s'eſt réduite à $x^3+ex+\frac{2}{27}d^3=0$

$$-\frac{1}{3}d^2 \quad -\frac{de}{3} \quad +f$$

Comment des racines de l'Equation $x^3+px+q=0$, on tire celles de l'Equation $y^3+dy^2+ey+f=0$.

ou en abrégeant $x^3+px+q=0$ par la supposition de $y=x-\frac{1}{3}d$, il s'ensuit que les valeurs de y dans l'Equation générale $y^3+dy^2+ey+f=0$ sont celles qu'on a en resolvant cette derniere Equation $x^3+px+q=0$, & en retranchant de ses trois racines $\frac{1}{3}d$.

XIII.

De-là, il suit qu'une Equation quelconque du troisiéme dégré sera entierement dans le même cas par rapport aux racines réelles ou imaginaires, que l'Equation qu'elle produit par l'évanouissement du second terme.

Une Equation du troisiéme dégré a ses trois racines réelles, ou une réelle avec deux imaginaires.

Ainsi on voit en se rappellant les articles VII, XI. que toute Equation du troisiéme dégré doit au moins avoir une racine réelle, & que les deux autres sont toujours ou toutes deux réelles, ou toutes deux imaginaires.

XIV.

Comment on distingue ces cas.

Pour distinguer lequel de ces deux cas arrive dans une Equation du troisiéme dégré donnée, on commencera par en faire évanouir le second terme afin de la pouvoir comparer à l'Equation $x^3+px+q=0$; & cette opération étant faite, si p est positif ou qu'étant négatif il soit tel que $\frac{1}{27}p^3$ ne soit pas plus grand que $\frac{1}{4}qq$, il n'y aura qu'une racine réelle,

laquelle ſera déterminée exactement par la formule de l'article VI.

Si au contraire p eſt négatif & tel que $\frac{1}{27}p^3$ ſoit plus grand que $\frac{1}{4}qq$, les trois racines ſeront réelles, mais aucune d'elles ne pourra être déterminée par la formule de l'article VI; à moins qu'on ne ſe contente d'une approximation comme celle qu'on a en transformant cette formule en une ſuite infinie.

XV.

Quelles ſont les racines lorſque $\frac{1}{27}p^3$ eſt négatif & $=\frac{1}{2}qq$.

S'il arrivoit que $\frac{1}{27}p^3$ fut négatif & égal à $\frac{1}{4}qq$, on pourroit être embarraſſé à ſçavoir auquel des deux cas précédens l'Equation ſe rapporteroit, c'eſt-à-dire qu'on ne ſçauroit s'il devroit y avoit ſeulement une racine réelle ou ſi toutes les trois le ſeroient, à cauſe que $\sqrt{\frac{1}{27}p^3 + \frac{1}{4}qq}$ étant alors zero, on ne ſçait ſi on le doit compter parmi les quantités poſitives ou parmi les négatives; mais l'inſpection des trois racines ou valeurs d'x trouvées précédemment décide bien-tôt la queſtion. Car la premiere valeur exprimée par . . . . . . $\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3}}$ $- \sqrt[3]{\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3}}$ ſe réduit alors à . . $-2\sqrt{\frac{1}{2}q}$, & les deux autres valeurs exprimées généralement par . . . .

$$\frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}} - \frac{1}{2}\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}}$$

$\pm\frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}qq+\frac{1}{27}p^3}}+\frac{1}{2}\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}qq+\frac{1}{27}p^3}}\times\sqrt{-3}$ se réduisent alors à $+\sqrt[3]{\frac{1}{2}q}\pm 0$, c'est-à-dire qu'elles sont toutes deux égales à $+\sqrt[3]{\frac{1}{2}q}$. Ainsi les Equations où $\sqrt{\frac{1}{4}qq+\frac{1}{27}p^3}$ est zero sont comptées parmi celles dans lesquelles les trois racines sont réelles.

XVI.

Application des méthodes précédentes à un exemple.

Pour faire présentement quelques applications des regles précédentes, supposons d'abord qu'on ait l'Equation $y^3+3yy-3y+25=0$ à résoudre; on commencera par faire évanouir le second terme de cette Equation, ce qui se fera suivant l'article II. en supposant $y=x-1$ & l'Equation délivrée de second terme que l'on aura par cette substitution sera $x^3-6x+30=0$ qui étant comparée à $x^3+px+q=0$ donne $p=-6$ & $q=30$.

Ces valeurs étant substituées dans....... $\sqrt{\frac{1}{4}qq+\frac{1}{27}p^3}$, cette quantité devient $\sqrt{217}$ qui est une quantité réelle, ainsi la formule de l'article VI doit donner en ce cas la valeur cherchée de x.

Faisant donc dans cette formule..... $\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}qq+\frac{1}{27}p^3}}-\sqrt[3]{\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}qq+\frac{1}{27}p^3}}$ les substitutions de 15 pour $\frac{1}{2}q$ & de $\sqrt{217}$ pour $\sqrt{\frac{1}{4}qq+\frac{1}{27}p^3}$ cette valeur généra le de x

devient $\sqrt[3]{-15+\sqrt{217}}-\sqrt[3]{15+\sqrt{217}}$ qui eſt la ſeule racine réelle que contienne l'Equation $x^3-6x+30=0$, & qui ne ſçauroit être réduite à une plus ſimple expreſſion ; ſubſtituant enſuite cette valeur de x dans l'Equation $y=x-1$, on aura . . . .

$$y=\sqrt[3]{-15+\sqrt{217}}-\sqrt[3]{15+\sqrt{217}}-1,$$

pour la ſeule racine réelle de l'Equation propoſée $y^3+3yy-3y+25=0$.

XVII.

Si on avoit une Equation du ſixiéme dégré, où l'inconnue ne ſe trouvât à aucune dimenſion impaire, il eſt évident qu'on la réſoudroit par la même méthode que la précédente, puiſque cette Equation ſe réduiroit tout de ſuite au troiſiéme dégré par une transformation ; qu'on eut, par exemple $z^6+9z^4+39zz+55=0$, en regardant zz comme l'inconnue de cette Equation, & ſuppoſant, ſuivant les principes précédens zz égal à une nouvelle inconnue x moins le tiers du coefficient du ſecond terme, c'eſt-à-dire $zz=x-3$, on changera cette Equation en $x^3+12x-8=0$ qui n'eſt que du troiſiéme dégré & qui n'a point même de ſecond terme.

Autre exemple contenant une Equation du ſixiéme dégré qui ſe réduit au troiſiéme.

Comparant alors cette Equation avec $x^3+px+q=0$, on a $p=12$, $q=-8$, & partant $\sqrt{\frac{1}{27}p^3+\frac{1}{4}qq}=\sqrt{80}$ d'où x ou . . . .

$\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{27}p^3+\frac{1}{4}q^2}}-\sqrt[3]{\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{27}p^3+\frac{1}{4}qq}}=$
$\sqrt[3]{4+\sqrt{80}}-\sqrt[3]{\sqrt{80}-4}$, & comme, par la supposition $zz=x-3$ ou $z=\sqrt{x-3}$ on aura alors l'inconnue cherchée ....

$x=\pm\sqrt{\sqrt[3]{4+\sqrt{80}}-\sqrt[3]{\sqrt{80}-4}-3}$ & les deux valeurs que cette expression donne en prenant le radical en $+$ & en $-$ sont les seules réelles des six que doit avoir l'Equation proposée.

Equations plus élevées qui s'y réduiroient aussi.

En général qu'on ait une Equation telle que $z^{3m}+az^{2m}+bz^{m}+c=0$ on la réduira tout de suite à une du troisiéme dégré & sans second terme en faisant $z^{m}=x-\frac{1}{3}a$.

XVIII.

Supposons présentement qu'on ait l'Equation $x^3+3x-4=0$ à résoudre, cette Equation n'ayant point de second terme, on peut tout de suite la comparer à $x^3+px+q=0$, & l'on a par cette comparaison $p=3$ & $q=-4$ & comme p est positif, on voit par l'article XIV. que la formule générale de l'article VI. doit encore réussir dans ce cas; substituant en effet ces valeurs de p & de q dans cette formule générale .... $=x$
$\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{27}p^3+\frac{1}{4}qq}}-\sqrt[3]{\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{27}p^3+\frac{1}{4}qq}}$
on a pour la seule valeur réelle de x,

$\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}-\sqrt[3]{-2+\sqrt{5}}$. Si l'on applique présentement à cette expression la méthode de la quatriéme Partie, art. XXXV, XXXVIII & XLI. on verra qu'elle se peut aisément réduire, parce que $2+\sqrt{5}$ est le cube de $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{5}$, & que $-2+\sqrt{5}$ est celui de $-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{5}$. D'où cette valeur de x se réduit à 1.

On auroit pû parvenir à cette même valeur de x sans la formule précédente en employant la regle de la troisiéme Partie, article XII & XIII. car on auroit trouvé que $x-1$ étoit un diviseur exact de la quantité x^3+3x-4.

XIX.

Soit maintenant proposé de résoudre l'Equation $x^3-90x-98=0$. En comparant cette Equation à l'Equation générale $x^3+px+q=0$ on a $p=-90$ & $q=-98$; or p étant négatif & tel que $\frac{1}{27}p^3$ est plus grand que $\frac{1}{4}qq$ l'Equation proposée est de celles qui ne peuvent pas se résoudre par la formule précédente. Je cherche alors par la méthode de la troisiéme Partie, art. XII & XIII si elle n'aura pas quelque diviseur, & ayant reconnu qu'elle n'en a point, je me sers de la méthode enseignée article X. pour trouver une valeur approchée. *Quatriéme exemple dans lequel la formule de l'art. VI. est insuffisante.*

Pour cela, je commence par substituer pour p & q leurs valeurs -90 & -98 dans la formule générale . . . . *Application de la méthode de l'article X pour approcher des racines.*

$$x=\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{27}p^3+\frac{1}{4}qq}}-\sqrt[3]{\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{27}p^3+\frac{1}{4}qq}}$$

& j'ai . . . .

$$x = \sqrt[3]{49+\sqrt{-24599}} - \sqrt[3]{-49+\sqrt{-24599}}$$

qui étant comparé à l'expression .... $\sqrt[3]{-a+b\sqrt{-1}} - \sqrt[3]{a+b\sqrt{-1}}$, laquelle étoit devenue (article x.) la suite infinie

$$-\frac{2a}{3b^{\frac{2}{3}}} \times \overline{-1 + \frac{5a^2}{27b^2} - \frac{22a^4}{243b^4} + \frac{374a^6}{6561b^6} - \&c.}$$

donne $a = -49$, $bb = +24599$, qu'il ne s'agit plus que de substituer dans cette suite infinie.

Quatrième exemple dans lequel la formule de l'art. VI. est infaillible.

Pour faire cette substitution, je commence par prendre la racine cube de 24599 afin d'avoir $b^{\frac{2}{3}}$, l'opération faite, j'ai environ 29, 08 pour cette racine cube, & partant .... $\frac{-2a}{3b^{\frac{2}{3}}}$ ou $\frac{98}{3\sqrt[3]{24599}}$ est environ $\frac{10000}{8902}$.

Quarant ensuite aa & le divisant par bb, j'ai pour $\frac{aa}{bb}$ environ 0, 0976, dont le quarré 0, 00952 est la valeur de $\frac{a^4}{b^4}$, quant à la valeur de $\frac{a^6}{b^6}$, & des puissances plus élevées, elle est inutile dans cette suite dont la marche est assez prompte.

Application de la méthode de l'article x pour approcher des racines.

Faisant alors les substitutions des valeurs de $\frac{a^2}{b^2}$, $\frac{a^4}{b^4}$ à la place de ces quantités, j'ai environ $-1, 104$ pour la valeur de x donnée par la formule de l'article VI, si on veut avoir

les deux autres valeurs de x qui doivent auſſi être réelles, ſuivant l'article XIV. il n'y a qu'à diviſer l'Equation $x^3 - 90x - 98 = 0$ par $x + 1,104$ qui eſt à très-peu de choſe près, ſuivant ce que l'on vient de voir, une de ſes racines. La diviſion faite, on a pour quotient $xx - 1,104x - 88,781$, & pour reſte $0,0142$ quantité aſſez petite pour être négligée, de ſorte qu'on peut regarder l'Equation $xx - 1,104x - 88,781 = 0$, comme le quotient exact de la diviſion de $x^3 - 90x - 98 = 0$ par $x + 1,104$, & comme le produit des deux racines cherchées. Réſolvant donc cette Equation on a pour les deux valeurs de x qu'elle donne $x = 0,552 \pm \sqrt{89,0857}$, c'eſt-à-dire $+9,990$ & $-8,886$.

Ainſi les trois valeurs de x dans l'Equation propoſée $x^3 - 90x - 98 = 0$ ſont à peu près $-1,104$; $+9,990$; $-8,886$. Quant aux valeurs exactes aucunes des méthodes connues juſqu'à préſent ne ſçauroient les faire trouver, & toute Equation qui ayant, comme la précédente, ſes coefficiens rationels n'aura aucun diviſeur rationel, ſera de même irréſoluble par ces méthodes lorſque $\frac{1}{27}p^3$ ſera négatif & plus grand que $\frac{1}{4}qq$.

XX.

La méthode que nous venons d'employer pour réſoudre par approximation les Equations du troiſiéme dégré dont les trois racines ſont réelles, a cet inconvenient que lorſque a differe peu de b, les termes de la ſérie qui

Inconvenient de l'approximation enſeignée, article X.

exprime la valeur de x décroissent si lentement, qu'il en faut un très-grand nombre pour approcher un peu exactement de la vraye valeur de x, & que par conséquent les calculs deviennent extrêmement pénibles. Il est donc à propos de chercher quelque méthode plus généralement commode dans la pratique.

XXI.

Autre méthode d'approximation générale & facile dans la pratique.

Dans cette vûe, je reprends l'Equation $x^3 + px + q = 0$ ou plûtôt $x^3 - px + q = 0$ (les cas qui échappent à la méthode de l'article VI. ne se trouvant jamais que parmi ceux où p est négatif) & je me propose de lui donner cette forme $z^3 - z = r$ qui est plus simple à cause qu'elle ne renferme qu'un terme d'indéterminé.

Afin de faire cette transformation, je fais $x = mz$, ce qui change l'Equation $x^3 - px + q = 0$ en $z^3 - \frac{p}{mm} z = - \frac{q}{m^3}$ qui m'apprend qu'en faisant $m = -\sqrt{p}$, si q est positif, & $m = \sqrt{p}$ si q est négatif, je donnerai toujours à l'Equation $x^3 - px + q = 0$ la forme $z^3 - z = + r$.

Je remarque présentement que si cette Equation est de celles que la formule de l'article VI. ne sçauroit résoudre, il faudra nécessairement que r soit plus petit que $\frac{1}{3}\sqrt{\frac{4}{3}}$ ou $\sqrt{\frac{4}{27}}$; & qu'en même-tems il y ait une des racines qui soit positive & plus grande que l'unité, mais moindre que $\sqrt{\frac{4}{3}}$; car si z surpassoit $\sqrt{\frac{4}{3}}$ on auroit pour r, c'est-à-dire pour $z^3 - z$ plus de

$\sqrt{\frac{4}{27}}$, & par conſéquent l'Equation $z^3 - z = r$ ſeroit du nombre de celles où la formule de l'article VI. réuſſit.

Cela poſé, je fais $z = 1 + \delta$, & ſubſtituant cette valeur dans l'Equation $z^3 - z = r$, elle donne $2\delta + 3\delta\delta + \delta^3 = r$, dans laquelle je remarque que δ étant une quantité toujours plus petite que $\sqrt{\frac{4}{3}} - 1$, c'eſt-à-dire plus petite que 0, 155, ſon cube eſt plus petit que 0, 0037. Or ce cube étant donc ſi petit, je vois qu'on ne peut pas commettre une grande erreur en négligeant le terme δ^3 dans l'Equation $2\delta + 3\delta\delta + \delta^3 = r$, c'eſt-à-dire en ſe contentant de réſoudre l'Equation $2\delta + 3\delta\delta = r$. Je réſous donc cette Equation, & elle me donne $\delta = \pm\sqrt{\frac{1}{9} + \frac{1}{3}r} - \frac{1}{3} = \pm\frac{\sqrt{1+3r} - 1}{3}$

& par conſéquent z ou $1 + \delta = \frac{2 \pm \sqrt{1+3r}}{3}$

ou ſimplement $z = \frac{2 + \sqrt{1+3r}}{3}$, puiſque des valeurs de z, on ne cherche que celle qui ſurpaſſe l'unité & qui eſt poſitive.

Pour ſçavoir à quoi peut monter l'erreur qu'on commet dans cette méthode, en négligeant le terme δ^3, prenons le cas où ce terme eſt le plus grand, ſuppoſons que z ou $1 + \delta$ ſoit $\sqrt{\frac{4}{3}}$, ce qui ne peut jamais arriver tant que l'Equation propoſée eſt de celles qui échappent à la méthode de l'article VI, nous aurons alors $r = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{4}{3}}$, & notre méthode

nous donnera pour valeur de z, $\frac{2+\sqrt{1+\sqrt{\frac{4}{3}}}}{3}$ au lieu de la vraye valeur $\sqrt{\frac{4}{3}}$. Or il eſt clair que ces deux quantités ne different entr'elles que d'environ $\frac{1}{1000}$ eme, donc la plus grande erreur qu'on peut commettre, en prenant $\frac{2+\sqrt{1+3r}}{3}$ pour la racine poſitive de l'Equation $z^3 - z = r$, ne va pas à $\frac{1}{1000}$ eme, ſi cette Equation eſt de celles que la formule de l'article VI. ne ſçauroit réſoudre.

La méthode qu'on vient d'enſeigner donne d'abord x à $\frac{1}{1000}$ eme près au moins.

Ayant calculé la valeur de z par l'expreſſion $\frac{2+\sqrt{1+3r}}{3}$ il faudra la multiplier par m pour avoir la valeur approchée de x.

XXII.

Si on ne trouve pas que cette réſolution de l'Equation propoſée approche aſſez de la véritable, c'eſt-à-dire qu'on regarde les erreurs qui pourroient aller aux environs d'un milliéme comme trop conſidérables, rien ne ſera plus aiſé que de trouver une autre valeur de la racine beaucoup plus exacte, par une opération fondée ſur les mêmes principes. Ayant calculé cette premiere valeur de x, & l'ayant nommée pour abreger k, on imaginera que la correction qu'il faut lui faire ſoit ϵ, c'eſt-à-dire, qu'on ſuppoſera que le véritable x ſoit $k+\epsilon$;

ſubſtituant alors cette quantité pour x dans l'Equation $x^3 - px + q = 0$, l'on aura... $k^3 + 3k^2\varepsilon + 3k\varepsilon^2 + \varepsilon^3 - pk - p\varepsilon + q = 0$ ou ſimplement $k^3 + 3k^2\varepsilon + 3k\varepsilon^2 - pk - p\varepsilon + q = 0$ en négligeant le terme ε^3 qui eſt bien plus négligeable que ne l'étoit le terme δ^3 à la premiere opération, puiſqu'il eſt infiniment plus petit ; réſolvant alors cette Equation la valeur de ε qu'elle donnera ſera la correction qui étant faite à la premiere valeur de x en donnera une ſeconde infiniment plus exacte.

Si on n'étoit pas encore content de cette ſeconde, on en trouveroit une troiſiéme en nommant la ſeconde valeur l, & ſubſtituant $l + \varphi$ à la place de x dans l'Equation propoſée $x^3 - px + q = 0$, & ainſi de ſuite.

Mais bien loin qu'on ait communément beſoin d'aller à des corrections ſi rigoureuſes, on pourra très-ſouvent ſe contenter de la valeur de x trouvée en premier lieu, où tout au plus il ſuffira, après la ſubſtitution de $k + \varepsilon$ pour x dans l'Equation $x^3 - px + q = 0$, de réſoudre l'Equation $k^3 + 3k^2\varepsilon - pk - p\varepsilon + q = 0$, c'eſt-à-dire de négliger outre le terme ε^3 le terme $3k\varepsilon^2$, parce que ce terme eſt déja très-petit.

XXIII.

Faiſons préſentement quelqu'application de cette méthode, ſoit par exemple l'Equation $z^3 - z = \frac{1}{3}$. En ſubſtituant $\frac{1}{3}$ pour r dans

Application de cette méthode à un exemple.

l'expression $\frac{2+\sqrt{1+3r}}{3}$, elle deviendra $\frac{2+\sqrt{2}}{3}$ c'est-à-dire environ 1, 138 qui est un peu plus grande que la vraye valeur de z; mais qui l'est de bien peu, puisque 1, 137, comme on le peut voir aisément par le calcul, seroit trop petit.

Pour approcher plus exactement de la vraye valeur de z on substitura $1,138+\varepsilon$ à la place de z dans l'Equation $z^3-z=\frac{1}{3}$, & l'on aura $0,002426739+2,885132\varepsilon=0$ en négligeant les termes affectés de ε^2 & de ε^3. Cette Equation étant résolue elle donne $\varepsilon=-0,000841$, &partant pour la valeur de z corrigée 1, 137159. Si on avoit voulu faire cette correction plus exacte en ne négligeant que le terme affecté de ε^3, on auroit résolu l'Equation $0,002426739+2,885132\varepsilon+3,414\varepsilon^2=0$, ce qui auroit donné la correction $\varepsilon=-0,000841836$, c'est-à-dire pour z corrigé 1, 137158164.

XXIV.

Autre exemple.

Supposons présentement qu'il s'agisse de résoudre de l'Equation $x^3-13x+5=0$, je fais $x=-z\sqrt{13}$, & elle se change en .. $z^3-z=\frac{5}{13\sqrt{13}}$, égalant donc r à $\frac{5}{13\sqrt{13}}$ dans la premiere valeur approchée $\frac{2+\sqrt{1+3r}}{3}$ de z

cette valeur devient $\frac{2+\sqrt{1+\frac{15}{13\sqrt{13}}}}{3}$, & elle donne par conſéquent pour x ....

$\frac{-2\sqrt{13}-\sqrt{13}+\frac{15}{\sqrt{13}}}{3}$, c'eſt-à-dire environ ... $-3,784$; ſi on veut avoir une valeur de x plus exacte, on ſuppoſera $x=-3,784+\varepsilon$, & on ſubſtituera cette valeur dans l'Equation $x^3-13x+5=0$, & l'on aura en négligeant les termes affectés de ε^2 & de ε^3 l'Equation $0,010205696+29,95597\varepsilon=0$ qui donnera $\varepsilon=-0,000341$, & par conſéquent $x=-3,784341$ valeur plus exacte que la premiere.

XXV.

Réſolution de l'Equation générale du quatriéme dégré.

Après avoir montré la maniere dont on parvient à la ſolution des Equations du troiſiéme dégré, voyons maintenant les moyens qu'il faut employer pour réſoudre celles du quatriéme dégré.

Prenant d'abord une Equation générale $y^4+ay^3+by^2+cy+d=0$ pour repréſenter toutes les Equations du quatriéme dégré, on réduit bien-tôt la difficulté à ne réſoudre qu'une Equation repréſentée par $z^4+pz^2+qz+r=0$ en faiſant $y=z-\frac{1}{4}a$. Enſuite pour réſoudre cette Equation, ce qui paroît de plus ſimple, c'eſt de la regarder comme le produit

Descartes

de deux Equations du second dégré, & de faire en sorte que la détermination des coefficiens que doivent avoir les termes de ces Equations du second dégré ne dépende que d'Equations plus aisées à résoudre que la proposée.

Soit pris d'abord $zz+xz+t=0$ pour l'une de ces Equations, il est évident que l'autre devra avoir pour second terme $-xz$, puisque le produit de ces deux Equations doit donner une Equation dénuée de second terme ; soit donc pris pour cette seconde Equation $zz-xz+s=0$ en multipliant ces deux Equations l'une par l'autre, on aura. . . . .

$$z^4 \begin{matrix} +s \\ -xx \\ +t \end{matrix}\, zz \begin{matrix} +sx \\ -tx \\ \end{matrix}\, z + ts = 0$$

qui étant comparée avec la proposée donne pour déterminer s, t, x, les trois Equations $s-xx+t=p$; $sx-tx=q$; $ts=r$.

Pour faire usage de ces trois Equations, je multiplie la premiere par x, & je l'ajoute ensuite avec la seconde Equation, j'ai alors $2sx-x^3=px+q$, d'où je tire $s=\frac{q+px+x^3}{2x}$ que je substitue dans l'Equation $ts=r$, ce qui me donne $t=\frac{2rx}{x^3+px+q}$.

Or ces deux valeurs de s & de t étant mises dans l'Equation $sx-tx=q$, j'ai enfin . . . . $\frac{x^3+px+q}{2}-\frac{2rx^2}{x^3+px+q}=q$ ou . . . . . .

$$x^6 + 2px^4 + ppx^2 - q^2 = 0$$
$$ - 4r$$

Equation du ſixiéme dégré, qui par la méthode de l'article XVII. ſe change en une du troiſiéme, d'où la difficulté des Equations du quatriéme dégré eſt réduite à celle du troiſiéme. Car cette derniere Equation (qu'on appelle la réduite) étant réſolue, on n'aura qu'à ſubſtituer la valeur de x qu'elle donne dans les Equations $zz - xz + s = 0$, $zz + xz + t = 0$ ou plûtôt $zz - xz + \frac{1}{2}xx + \frac{1}{2}p + \frac{q}{2x} = 0$ & $zz + xz + \frac{2r}{xx + p + \frac{q}{x}} = 0$, & réſoudre enſuite ces Equations, ou ce qui revient au même ſubſtituer la valeur de x dans les racines $z = \frac{1}{2}x \pm \sqrt{-\frac{1}{4}xx - \frac{1}{2}p - \frac{q}{2x}}$ & $z = -\frac{1}{2}x \pm \sqrt{-\frac{2r}{xx+p+\frac{q}{x}} + \frac{1}{4}xx}$ de ces deux Equations, & l'on aura les quatre racines cherchées de l'Equation $z^4 + pz^2 + qz + r = 0$, & partant celles de l'Equation propoſée $y^4 + ay^3 + by^2 + cy + d = 0$ qui l'avoit produite.

La réſolution d'une Equation du quatriéme dégré dépend d'une Equation du troiſiéme.

Cette Equation s'appelle la réduite.

XXVI.

Il paroît d'abord par l'expreſſion de ces valeurs que dans le quatriéme dégré ainſi que dans le troiſiéme, on ne ſçauroit arriver à une ſeule expreſſion pour toutes les racines de

l'Equation. Cependant si on remarque que la quantité x que renferment les deux expressions précédentes est nécessairement un radical quarré, puisqu'elle est venue de la résolution d'une Equation où x a toujours une dimension paire, on verra sans peine que chacune des expressions précédentes peut désigner quatre racines, la premiere s'écrivant alors ainsi . . . .

Dans le quatriéme dégré on peut exprimer les quatre racines par une seule formule.

$z = \pm \frac{1}{2} x \pm \sqrt{- \frac{1}{4} xx - \frac{1}{2} p \mp \frac{q}{2x}}$, & la seconde $z = \mp \frac{1}{2} x \pm \sqrt{\frac{1}{4} xx - \frac{2r}{xx + p \pm \frac{q}{x}}}$.

Ces deux Equations paroissant d'abord différentes, on peut craindre de s'être trompé dans le raisonnement précédent, puisqu'il semble mener à une absurdité qui seroit d'avoir huit racines pour une Equation du quatriéme dégré; mais il est aisé de voir qu'elle n'est qu'apparente, car l'identité de ces deux expressions se réduit à celle de $\sqrt{\frac{1}{4} xx - \frac{2r}{xx + p \mp \frac{q}{x}}}$, & de $\sqrt{- \frac{1}{4} xx - \frac{1}{2} p \mp \frac{q}{2x}}$, c'est-à-dire de $- \frac{1}{2} xx - \frac{1}{2} p \mp \frac{q}{2x}$ & de $- \frac{2r}{xx + p \mp \frac{q}{x}}$, & l'identité de ces deux dernieres quantités ne sçauroit manquer d'avoir lieu aussi-tôt que x

a été déterminé par l'Equation $x^6 + 2px^4 + \begin{matrix} p^2 \\ -4r \end{matrix} x^2 - q^2 = 0$, puisque cette Equation se tire tout de suite de l'égalité de $-\frac{1}{2}xx - \frac{1}{2}p \mp \frac{q}{2x}$ & de $\frac{2r}{xx + p \mp \frac{q}{x}}$.

XXVII.

Des deux expressions précédentes, la premiere $z = \pm\frac{1}{2}x \pm \sqrt{-\frac{1}{4}xx - \frac{1}{2}p \mp \frac{q}{2x}}$ étant la plus aisée à employer sera celle qu'il faudra choisir, & les quatre valeurs générales de z qu'elle exprime à la fois sont . . . .

$$z = \frac{1}{2}x + \sqrt{-\frac{1}{4}xx - \frac{1}{2}p - \frac{q}{2x}}$$

$$z = \frac{1}{2}x - \sqrt{-\frac{1}{4}xx - \frac{1}{2}p - \frac{q}{2x}}$$

$$z = -\frac{1}{2}x + \sqrt{-\frac{1}{4}xx - \frac{1}{2}p + \frac{q}{2x}}$$

$$z = -\frac{1}{2}x - \sqrt{-\frac{1}{4}xx - \frac{1}{2}p + \frac{q}{2x}}.$$

XXVIII.

Comme l'Equation d'où l'on tire la valeur de x donne nécessairement trois valeurs de x précédées du signe $\pm$, & qu'on n'a aucune

raiſon pour préferer l'une de ces valeurs aux autres, que d'ailleurs on ſçait qu'une Equation du quatriéme dégré ne ſçauroit avoir plus de quatre racines, il vient aſſez naturellement dans l'eſprit qu'on peut indifféremment employer celle qu'on voudra de ces trois valeurs de x précédées de $\pm$, & en tirer cependant toujours la même expreſſion pour les quatre valeurs de z.

On arrive aux mêmes racines d'une Equation du quatriéme dégré quelle que ſoit celle des racines de la réduite qu'on ait priſe.

Mais quoiqu'après avoir un peu réfléchi ſur la théorie des Equations, on ne puiſſe gueres douter que cela ne ſoit ainſi, on doit ſouhaiter de s'en aſſurer par le détail du calcul.

Pour y parvenir, ce qui ſe préſente le plus naturellement, c'eſt de trouver les trois valeurs de x précédées de $+$ que donne l'Equation $x^6 + 2px^4 + ppx^2 - q^2 = 0$, & les ſubſti-
$-4r$
tuer enſuite l'une après l'autre dans l'expreſſion

$$z = \pm \tfrac{1}{2}x \pm \sqrt{-\tfrac{1}{4}xx - \tfrac{1}{2}p \mp \frac{q}{2x}}$$ afin de

reconnoître l'identité des trois différentes expreſſions qu'on auroit par ces ſubſtitutions; mais le calcul que cette méthode demanderoit eſt ſi long, qu'on ne ſçauroit ſe réſoudre à le ſuivre juſqu'au bout. Voici une autre maniere de parvenir au même reſultat.

Je remarque d'abord que quelle que ſoit la valeur de x que je ſubſtitue dans l'expreſſion

générale $z = \pm \frac{1}{2}x \pm \sqrt{-\frac{1}{4}xx - \frac{1}{2}p \mp \frac{q}{2x}}$,

les quatre valeurs de z exprimées à la fois par cette quantité pourront être repréſentées par $i+k$, $i-k$; $-i+l$, $-i-l$: ou ce qui revient au même que les quatre racines de l'Equation $z^4+pzz+qz+r=0$ pourront être repréſentées par $z-i-k$, $z-i+k$, $z+i-l$, $z+i+l$; i déſignant alors la partie $\frac{1}{2}x$ de la valeur de z, & k & l les deux quantités $\sqrt{-\frac{1}{4}xx-\frac{1}{2}p-\frac{q}{2x}}$ & . . . . . $\sqrt{-\frac{1}{4}xx-\frac{1}{2}p+\frac{q}{2x}}$, multipliant donc ces quatre racines les unes par les autres, j'ai l'Equation

$$\begin{array}{llll} z^4 - 2iiz^2 & -2ikkz & +i^4 & =0 \\ - kk & +2ill & -iikk & \\ - ll & & -iill & \\ & & +kkll & \end{array}$$

qui étant comparée à $z^4+pzz+qz+r=0$ donne les Equations

$p=-2ii-kk-ll$, $q=-2ikk+2ill$,
$r=i^4-iikk-iill+kkll$

par leſquelles l'Equation $x^6+2px^4+ppx^2 \atop -4r$ $-q^2=0$ ſe change en

$$\begin{array}{llll} x^6 - 4iix^4 & +8iikkx^2 & -4iik^4 & =0 \\ - 2kk & +8iill & +8iikkll & \\ - 2ll & +k^4 & & \\ & -2kkll & -4iil^4 & \\ & +l^4 & & \end{array}$$

dont les racines ſont $x=\pm 2i$; $x=\pm k \pm l$; $x=\pm k \mp l$; or ſi on ſubſtitue préſentement celle qu'on voudra de ces valeurs de x

dans les quatre expressions contenues dans . . $z = \pm \frac{1}{2}x \pm \sqrt{-\frac{1}{4}xx - \frac{p}{2} \mp \frac{q}{2x}}$ ou plûtôt dans . . . . $z = \pm \frac{1}{2}x \pm \sqrt{-\frac{1}{4}xx + ii + \frac{1}{2}kk + \frac{1}{2}ll \mp \frac{ill - ikk}{x}}$ on verra qu'il en viendra également les quatre valeurs de z ; $i + k$, $i - k$, $-i + l$, $-i - l$.

XXIX.

Outre que par le moyen qu'on vient d'employer, on s'assure qu'il est indifférent de prendre celle qu'on veut des trois racines de la réduite $x^6 + 2px^4 + \begin{matrix} pp \\ -4r \end{matrix} xx - qq = 0$, pour la substituer dans l'Equation $z^4 + pz^2 + qz + r = 0$; on a en même-tems l'occasion de faire une remarque importante sur les Equations du quatriéme dégré ; c'est que leurs racines sont toujours ou toutes quatre réelles, ou toutes quatre imaginaires, ou bien, que deux des quatre racines sont réelles & les deux autres imaginaires. Car il n'est pas possible de faire d'autres suppositions pour les quatre racines de l'Equation donnée, aussi-tôt qu'on est assuré, comme on vient de l'être, que ces quatre racines sont toutes exprimées à la fois par la formule . . .

Les racines d'une Equation du quatriéme dégré sont toutes réelles ou toutes imaginaires ou deux réelles & deux imaginaires.

$$\pm \frac{1}{2}x \pm \sqrt{-\frac{1}{4}xx - \frac{1}{2}p \mp \frac{q}{2x}},$$

XXX.

En voyant cette valeur des racines des Equations du quatriéme dégré, on croiroit d'abord, à cauſe que x eſt un radical quarré, que lorſque que quelques-unes de ces racines ſont imaginaires, ce pourroit être des imaginaires d'une autre nature que ceux du ſecond dégré, c'eſt-à-dire qu'au lieu d'être ſimplement la ſomme d'une quantité réelle & de la racine d'une quantité réelle, mais négative, telle par exemple qu'eſt $a+\sqrt{-b}$, ce pourroit être des quantités compoſées de racines imaginaires ſimples & de la racine d'autres quantités en partie réelle & en partie imaginaires comme ſeroit $\sqrt{-b+\sqrt{a+\sqrt{-b}}}$, mais on peut s'aſſurer aiſément que toutes les racines imaginaires du quatriéme dégré peuvent ſe réduire, ainſi que celles du ſecond, à la ſomme de quantités réelles & de la racine de quantités réelles & négatives. Car ayant vû tout à l'heure que lorſqu'on veut trouver la valeur de z on peut choiſir à volonté entre les valeurs de xx que donne la réduite, & remarquant d'ailleurs par la théorie des Equations que cette réduite qui a toujours pour dernier terme ou produit des racines, une quantité qq négative, doit par conſéquent avoir néceſſairement une valeur de xx poſitive, on verra que x pourra toujours être une quantité réelle, & que dans ce cas lorſque

Les racines imaginaires du quatriéme dégré ſont de même nature que celles du ſecond.

$\sqrt{-\frac{1}{4}xx - \frac{1}{2}p \mp \frac{q}{2x}}$ ſera imaginaire, ce ne ſera autre choſe que la racine d'une quantité réelle & négative.

XXXI.

Lorſque des quatre racines deux ſont réelles & deux imaginaires, on réſout exactement l'Equation.

Une autre remarque que peut fournir encore l'art. XXVIII. c'eſt que toutes les fois que des quatre racines deux ſeront imaginaires & deux réelles, la réduite $x^6 + 2px^4 + ppx^2 - qq = 0$
$ - 4r$
ſera du nombre des Equations exactement réſolues par la formule de l'article VI, c'eſt-à-dire qu'on arrivera alors à la ſolution complete de l'Equation $z^4 + pz^2 + qz + r = 0$.

C'eſt le contraire lorſque les quatre racines ſont toutes réelles ou toutes imaginaires.

Au contraire lorſque les quatre racines ſeront ou toutes réelles ou toutes imaginaires l'Equation réduite ne pourra pas ſe réſoudre par la formule de l'article VI, & par conſequent l'on ne parviendra pas par ce moyen à la ſolution de l'Equation $z^4 + pz^2 + qz + r = 0$.

Ces deux vérités ſe tirent de ce que la réduite

$$\begin{array}{llll} x^6 - 4ii\,x^4 & + 8iikk\,x^2 & - 4iik^4 & = 0 \\ - 2ll & + 8iill & + 8iikkll & \\ - 2kk & + k^4 & - 4iil^4 & \\ & - 2kkll & & \\ & + l^4 & & \end{array}$$

eſt le produit des trois racines $xx - 4ii$, $xx - kk - 2kl - ll$, $xx - kk + 2kl - ll$; or ſi l'une des deux quantités k ou l ſeulement eſt imaginaire les deux racines $xx - kk - 2kl - ll$, $xx - kk + 2kl - ll$ ſont imaginaires, &

par conséquent la réduite est alors résoluble par la formule de l'article VI.

Si au contraire k & l sont toutes deux réelles, ou toutes deux imaginaires, les trois racines $xx - 4ii$, $xx - kk - 2kl - ll$, $xx - kk + 2kl - ll$ de la réduite seront toutes trois réelles, & par conséquent la formule de l'article VI ne pourra par les donner, ainsi dans le quatriéme dégré comme dans le troisiéme, les formules de la résolution ne sçauroient s'appliquer qu'aux Equations qui ont deux racines imaginaires.

XXXII.

Maniere de distinguer le cas des quatre racines réelles de celui des quatre imaginaires.

Lorsqu'on aura une Equation du quatriéme dégré à résoudre & qu'on aura formé par son moyen la réduite $x^6 - 2px^4 + ppx^2 \begin{array}{l} - qq \\ - 4r \end{array} = 0$, si on trouve qu'elle échappe à la formule de l'article VI, & qu'on se propose de sçavoir si alors les quatre racines sont réelles ou si elles sont toutes quatre imaginaires, on y parviendra aisément en partant des deux réfléxions suivantes qui se présentent assez naturellement en examinant la réduite de l'article XXVIII.

1°. Lorsque les quatre racines sont réelles la réduite

$$x^6 \begin{array}{l} - 4ii \\ - 2kk \\ - 2ll \end{array} x^4 \begin{array}{l} + 8iikk \\ + 8iill \\ + k^4 \\ - 2kkll \\ + l^4 \end{array} x^2 \begin{array}{l} - 4iik^4 \\ + 8iikkll \\ - 4iil^4 \end{array} = 0 \text{ ou}$$

Conditions des quatre racines réelles.

$x^6 - 2\times\overline{2ii+kk+ll}\times x^4 + \overline{8ii\times\overline{kk+ll}+\overline{kk-ll}^2}\times x^2 - 4ii\times\overline{kk-ll}^2 = 0$ a néceſſairement un ſecond terme négatif & un troiſiéme terme poſitif, puiſque $-2\times\overline{2ii+kk+ll}$ ne ſçauroit être ni zero ni poſitif tant que i, k, l, ſont des quantités réelles, & que $8ii\times\overline{kk+ll}+\overline{kk-ll}^2$ ne ſçauroit non plus être ni zero ni négatif dans les mêmes conditions.

Maniere de diſtinguer le cas des quatre racines réelles de celui des quatre imaginaires.

2°. Si au contraire les quatre racines ſont imaginaires, ou ce qui revient au même ſi kk & ll ſont négatifs, la réduite qui doit alors s'écrire ainſi

$$\begin{array}{llll} x^6 - 4iix^4 & - 8iikkx^2 & - 4iik^4 = 0 & \text{ou} \\ + 2kk & - 8iill & + 8iikkll & \\ + 2ll & + k^4 & - 4iil^4 & \\ & - 2kkll & & \\ & + l^4 & & \end{array}$$

Conditions des quatre racines imaginaires.

$x^6 + 2\times\overline{kk+ll-2ii}\times x^4 + \overline{\overline{kk+ll}\times\overline{kk+ll-8ii}-4kkll}\times x^2 - 4ii\times\overline{kk-ll}^2$ ne ſçauroit jamais avoir à la fois, & le ſecond terme négatif & le troiſiéme poſitif. Car ſi $kk+ll$ eſt plus petit que $2ii$, ce qui rendroit le ſecond terme négatif, le troiſiéme terme $\overline{kk+ll}\times\overline{kk+ll-8ii}-4kkll$ ſera néceſſairement négatif.

XXXIII.

Toute Equation du quatriéme dégré ſans ſecond terme, & qui

L'inſpection de l'Equation . . . .

$$\begin{array}{lll} z^4 - 2iiz^2 & - 2ikkz & \text{\&c. donnée dans} \\ - kk & + 2ill & \\ - ll & & \end{array}$$

a le troisiéme positif, a des racines imaginaires.

le même article XXVIII. fournit une remarque, par laquelle on peut reconnoître en quelques rencontres si une Equation qui doit avoir ses quatre racines ou toutes réelles ou toutes imaginaires, est dans le premier de ces deux cas ou dans le second. C'est que toute Equation du quatriéme dégré dont le second terme est évanoui, & dont le troisiéme est positif, doit avoir nécessairement des racines imaginaires, puisque le troisiéme terme de toutes ces Equations représenté par $-\overline{2ii+kk+ll}\times zz$, ne sçauroit jamais être positif tant que ii, kk, ll, seront positifs : c'est-à-dire tant que les racines seront réelles. Or, dès qu'on sçaura qu'une Equation du quatriéme dégré a des racines imaginaires, & qu'on aura reconnu d'ailleurs qu'elle doit avoir ses quatre racines ou toutes réelles ou toutes imaginaires, on ne sera plus embarrassé à sçavoir lequel de ces deux cas a lieu.

XXXIV.

Lorsqu'on aura reconnu que les quatre racines d'une Equation du quatriéme dégré sont réelles, avant d'entreprendre de résoudre par approximation sa réduite pour avoir la valeur de x à substituer dans celle de z; il sera à propos d'examiner par les méthodes de la troisiéme Partie si quelques-unes de ses racines ne seroient pas commensurables. S'il n'y en avoit qu'une, on n'en seroit gueres plus avancé pour avoir les trois autres, puisque

alors il resteroit à résoudre une Equation du troisiéme dégré, dont les trois racines seroient réelles. Mais si l'Equation du quatriéme dégré avoit deux racines commensurables, elle seroit résolue aussi-tôt que ces deux racines seroient trouvées, parce qu'alors il ne resteroit plus qu'une Equation du second dégré à résoudre.

XXXV.

Avantage qu'on trouve à chercher les diviseurs commensurables dans la réduite plûtôt que dans la proposée.

Lorsqu'une Equation du quatriéme dégré a deux racines commensurables, on peut les reconnoître plus aisément par sa réduite que par elle-même, car il est clair alors que dans les quatre valeurs de z représentées généralement par $i + k$; $i - k$; $- i + l$; $- i - l$; i ne pourra jamais être qu'une quantité commensurable, & partant dans la racine $xx - 4ii$ de la réduite, $4ii$ représentera une quantité quarrée & commensurable; or par cette réfléxion on peut diminuer beaucoup les tentatives nécessaires dans la méthode de la troisiéme Partie, article XII & XIII puisqu'il ne faudra chercher dans les diviseurs du dernier terme qu'une quantité quarrée, & prise avec le signe $-$.

Il en seroit de même si l'Equation $z^4 + pzz + qz + r = 0$ devoit se décomposer en deux Equations du second dégré dont les coefficiens fussent commensurables, au lieu d'employer alors la méthode de la troisiéme Partie, article XIX, il faudra employer celle de l'article XII & XIII pour chercher les divi-

ſeurs de la réduite, & ne choiſir parmi les diviſeurs du dernier terme que les quantités quarrées & affectées du ſigne —.

XXXVI.

Lorſqu'une Equation où x eſt au quatriéme dégré a deux racines commenſurables ou qu'elle eſt ſimplement compoſée de deux diviſeurs de deux dimenſions, on peut dire qu'elle n'eſt pas véritablement du quatriéme dégré, & il eſt bien ſimple alors qu'elle ſe réſolve par la méthode du ſecond dégré; mais il y a des Equations abſolument du quatriéme dégré qui ſe réduiſent cependant à la méthode du ſecond dégré. Telles ſont les Equations traitées dans la quatriéme Partie, article xx & les Equations ſemblables à

$$\begin{array}{l} z^4 + 2\,aazz - 8aabz + c^4 = 0 \\ - 4\,ab - 4a^3b \end{array}$$

, qui eſt le produit des deux Equations $zz - 2z\sqrt{ab} + aa - 2a\sqrt{ab} = 0$ & $zz + 2z\sqrt{ab} + aa + 2a\sqrt{ab} = 0$, & qui a pour ſes quatre racines $\pm\sqrt{ab} \pm \sqrt{ab - a^2 \pm 2a\sqrt{ab}}$, dans leſquelles il n'entre point d'autres radicaux que ceux du ſecond dégré.

On peut diſtinguer aiſément toutes les Equations qui ſont dans ce cas; car puiſque dans ces Equations la partie $\pm \frac{1}{2}x$ de l'expreſſion $\pm \frac{1}{2}x \pm \sqrt{-\frac{1}{4}xx - \frac{1}{2}p \mp \frac{q}{2x}}$ de la va- Maniere de connoitre les Equations du quatriéme dégré, dont les racines n'ont point d'autres radi-

eaux que ceux du second dégré.

leur de z, ou ce qui revient au même la partie i commune aux quatre racines $i + k$, $i - k$, $-i + l$, $-i - l$, doit être un ſimple radical du ſecond dégré, à cauſe que x ne monte qu'à des dimenſions paires dans la réduite ; il faut néceſſairement que dans toutes les Equations de cette nature la réduite ſoit diviſible par $xx \pm$ une quantité commenſurable, or les diviſeurs de cette eſpece ſont aiſés à trouver par la méthode de l'article XII & XIII de la troiſiéme Partie.

XXXVII.

Ce qu'il faut faire pour avoir les valeurs approchées des quatre racines, lorſqu'elles ſont réelles.

Lorſqu'on aura reconnu que les quatre racines d'une Equation du quatriéme dégré ſont toutes réelles, & que cette Equation n'a aucun diviſeur commenſurable ni affecté de radicaux du ſecond dégré ; on cherchera une des racines de ſa réduite par la méthode d'approximation enſeignée article XXI, & après l'avoir ſubſtituée à la place de x dans la formule générale $z = \pm\frac{1}{2}x \pm \sqrt{-\frac{1}{4}xx - \frac{1}{2}p \pm \frac{q}{2x}}$, on aura les valeurs approchées des quatre racines cherchées.

XXXVIII.

Application des méthodes précédentes à un exemple

Dans la vûe d'appliquer les regles précédentes, ſoit pris pour exemple l'Equation $z^4 + 3z^2 + 2z - 3 = 0$. En comparant cette Equation à l'Equation générale $z^4 + pz^2 + qz + r = 0$, on aura $p = 3$, $q = 2$, $r = -3$. Et ces valeurs

étant substituées dans la réduite générale . . $x^6 + 2px^4 + ppxx - qq = 0$, la changeront en
$-4r$
$x^6 + 6x^4 + 21x^2 - 4 = 0$.

Pour résoudre cette Equation soit d'abord fait $x^2 = u - 2$, afin de faire évanouir le second terme & la réduite se changera en $u^3 + 9u - 30 = 0$, laquelle suivant l'article XIV. est de celles qui n'ont qu'une racine de réelle, & est par conséquent dans le cas d'être résolue par la formule générale de l'article VI. d'où l'on voit que l'Equation proposée aura deux racines réelles & deux imaginaires, & qu'on parviendra par conséquent à les exprimer toutes les quatre par les formules précédentes.

On auroit pû reconnoître (article XXXIII.) que cette Equation devoit avoir des racines imaginaires par cela seul que son troisiéme terme $3z^2$ avoit un coefficient positif.

Résolvant maintenant l'Equation $u^3 + 9u - 30 = 0$ par la formule de l'article VI. on a pour sa racine réelle $u = \sqrt[3]{15 + 6\sqrt{7}} + \sqrt[3]{15 - 6\sqrt{7}}$, donc $\pm\sqrt{u - 2}$ ou . . . .

$$x = \pm\sqrt{\sqrt[3]{15 + 6\sqrt{7}} + \sqrt[3]{15 - 6\sqrt{7}} - 2}.$$

Si on substitue ensuite cette valeur de x dans la valeur générale . . . .

$z = \pm\frac{1}{2}x \pm\sqrt{-\frac{1}{4}xx - \frac{p}{2} \mp \frac{q}{2x}}$ qui est dans le cas présent $z = \pm\frac{1}{2}x \pm\sqrt{-\frac{1}{4}xx - \frac{3}{2} \mp \frac{1}{x}}$

on aura pour les deux racines réelles de l'Equation proposée

$$z = -\tfrac{1}{2}\sqrt{\sqrt[3]{15+6\sqrt{7}} + \sqrt[3]{15-6\sqrt{7}} - 2}$$

$$\pm\sqrt{-\tfrac{1}{4}\sqrt[3]{15+6\sqrt{7}} - \tfrac{1}{4}\sqrt[3]{15-6\sqrt{7}} - 1 + \frac{1}{\sqrt{\sqrt[3]{15+6\sqrt{7}} + \sqrt[3]{15-6\sqrt{7}} - 2}}}$$

& pour les deux imaginaires

$$z = +\tfrac{1}{2}\sqrt{\sqrt[3]{15+6\sqrt{7}} + \sqrt[3]{15-6\sqrt{7}} - 2}$$

$$\pm\sqrt{-\tfrac{1}{4}\sqrt[3]{15+6\sqrt{7}} - \tfrac{1}{4}\sqrt[3]{15-6\sqrt{7}} - 1 - \frac{1}{\sqrt{\sqrt[3]{15+6\sqrt{7}} + \sqrt[3]{15-6\sqrt{7}} - 2}}}$$

XXXIX.

Autre exemple.

Soit présentement l'Equation $z^4 - 6z^2 + 8z - 1 = 0$, en la comparant à l'Equation générale on en tirera $p = -6, q = 8, r = -1$. Et partant, la réduite sera $x^6 - 12x^4 + 40x^2 - 64 = 0$, dans laquelle faisant $x^2 = u + 4$, afin que le second terme disparoisse, on aura $u^3 - 8u - 32 = 0$ qui étant comparée à la formule générale de l'article VI donnera une seule valeur réelle laquelle sera . . . . . .

$$\sqrt[3]{16 + \frac{80}{3\sqrt{3}}} + \sqrt[3]{16 - \frac{80}{3\sqrt{3}}} \quad \text{ou}$$

$$u = \frac{2\sqrt[3]{6\sqrt{3}+10} + 2\sqrt[3]{6\sqrt{3}-10}}{\sqrt{3}}$$ qui en se servant de la méthode de la quatriéme Partie, article XXXV. se réduit à . . . .

$u = \frac{2 \times \overline{1+\sqrt{3}} - 2 \times \overline{1-\sqrt{3}}}{\sqrt{3}} = 4$, ſubſtituant préſentement cette valeur de u dans $x = \sqrt{\overline{u+4}}$, on aura $x = \sqrt{8}$, par laquelle on changera l'Equation générale . . . .

$z = \pm \frac{1}{2} x \pm \sqrt{\overline{-\frac{1}{4}xx - \frac{p}{2} + \frac{q}{2x}}}$ en . . .

$z = +\sqrt{2} \pm \sqrt{\overline{1-\sqrt{2}}}$ qui donne pour les deux racines réelles de l'Equation propoſée $-\sqrt{2} \pm \sqrt{\overline{1+\sqrt{2}}}$, & pour les deux imaginaires $+\sqrt{2} \pm \sqrt{\overline{1-\sqrt{2}}}$. Ainſi l'Equation propoſée $z^4 - 6z^2 + 8z - 1 = 0$ eſt de celles qui peuvent ſe décompoſer en deux Equations du ſecond dégré, dont les coefficiens ſont incommenſurables, car chacune des doubles racines précédentes ſont les racines des Equations $zz + 2z\sqrt{2} + 1 - \sqrt{2} = 0$ & $zz - 2z\sqrt{2} + 1 + \sqrt{2} = 0$.

On auroit pû ſans appliquer la formule de l'article VI, & par conſéquent ſans avoir beſoin de la méthode de la quatriéme Partie, article XXXV. réſoudre l'Equation $x^6 - 12x^4 + 40x^2 - 64 = 0$, en employant la méthode de la troiſiéme Partie, articles XII & XIII. car on auroit trouvé, par cette méthode, que cette Equation avoit pour diviſeur $xx - 8 = 0$.

XL.

Soit l'Equation $y^4 + 16y^3 + 99y^2 + 228y + 144 = 0$ en ſubſtituant dans cette Equation Troiſiéme exemple.

V

$z - 4$ pour y afin de faire évanouir le ſecond terme, on la changera en $z^4 + 3z^2 - 52z + 48 = 0$ qui étant comparée à l'Equation générale $z^4 + pz^2 + qz + r = 0$ donnera $p = 3$; $q = -52$; $r = 48$, & partant la réduite $x^6 + 6x_4 - 183x^2 - 2704 = 0$, de laquelle faiſant évanouir le ſecond terme par la ſubſtitution de $u - 2$ à la place de x^2 on tirera $u^3 - 195u - 2322 = 0$ qui eſt réſoluble par la formule de l'article VI, & fait voir par conſéquent que l'Equation propoſée eſt de celles qu'on peut réſoudre exactement, c'eſt-à-dire de celles qui ont deux racines réelles & deux racines imaginaires. Pour les trouver, ſoit donc employée la formule de l'article VI. à réſoudre l'Equation $u^3 - 195u = 2322 = 0$, on aura pour la ſeule valeur réelle qu'elle donne . . . .

$$u = \sqrt[3]{1161 + \sqrt{1073296}} - \sqrt[3]{-1161 + \sqrt{1073296}}$$

qui ſe réduit à

$$\sqrt[3]{1161 + 1036} - \sqrt[3]{-1161 + 1036}$$ ou

à $\sqrt[3]{2197} + \sqrt[3]{125}$, ou enfin à 18; ſubſtituant préſentement cette valeur de u dans $x = \sqrt{u - 2}$ on a $x = \sqrt{16} = 4$ qu'il ne s'agit plus que de ſubſtituer dans la valeur générale de $z = \pm \frac{1}{2}x \pm \sqrt{-\frac{1}{4}xx - \frac{p}{2} \mp \frac{q}{2x}}$. On aura par cette ſubſtitution pour les deux racines réelles de l'Equation $z^4 + 3z^2 - 52z + 48 = 0$; $z = 2 \pm \sqrt{-4 - \frac{5}{2} + \frac{13}{2}}$ ou $z = 2 \pm 1$, c'eſt-à-

dire ou 3 ou 1, & pour les deux racines imaginaires $z = -2 \pm \sqrt{-4 - \frac{3}{2} - \frac{13}{2}}$ ou $z = -2 \pm \sqrt{-12}$. Subſtituant enſuite ces quatre valeurs dans $y = z - 4$, on aura pour les quatre racines de l'Equation propoſée $y^4 + 16y^3 + 99y^2 + 228y + 144 = 0$; $y = -1$; $y = -3$; $y = -6 \pm \sqrt{-12}$. On auroit pû trouver ces racines tant par la méthode de la troiſiéme Part. art. XII & XIII. que par celle de l'art. XXIV. de la même Partie en les cherchant dans l'Equation $y^4 + 16y^3 + 99y^3 + 228y + 144 = 0$. Car par la premiere de ces méthodes on auroit trouvé les diviſeurs ſimples $y + 1$; $y + 3$, & pour quotient $yy + 12y + 48$, & la ſeconde auroit donné les deux diviſeurs de deux dimenſions $yy + 4y + 3$, & $yy + 12y + 48$; on auroit encore pû trouver ces racines bien facilement en cherchant les diviſeurs de la réduite par le moyen de la méthode des art. XII & XIII de la troiſiéme Partie, & en ajoutant à cette méthode l'attention de ne choiſir parmi les diviſeurs du nombre 2704 que des nombres quarrés, & de ne les employer qu'avec le ſigne $-$. On auroit trouvé alors que cette réduite a pour diviſeur de cette eſpece $xx - 16 = 0$ qui donne $x = 4$.

XLI.

Soit l'Equation $z^4 + 11z^2 - 2z + 56 = 0$ en la comparant à $z^4 + pz^2 + qz + r = 0$ il vient $p = 11$, $q = -2$, $r = 56$. D'où la ré-

duite est $x^6+22x^4-103x^2-4=0$ qui devient $u^3-\frac{793}{3}u+\frac{41582}{27}=0$, après avoir fait évanouir le second terme. Cette Equation étant de celles qui échappent à la formule de l'article VI. l'Equation proposée doit être ou de celles qui ont leurs quatre racines réelles, ou de celles qui les ont toutes quatre imaginaires; mais à cause du terme positif $11z^2$, il faut (article XXXIII.) qu'il y ait des racines imaginaires, donc toutes les quatre racines le sont. Je parviens ensuite à réduire ces quatre racines imaginaires à de simples racines imaginaires du second dégré en cherchant par la méthode des articles XII & XIII. de la troisiéme Partie, les diviseurs de la réduite, car trouvant $xx-4$ pour diviseur de cette réduite, je vois aussi-tôt que les quatre racines de l'Equation proposée sont $z=+1\pm\sqrt{-6}$ & $z=-1\pm\sqrt{-7}$.

XLII.

Soit maintenant l'Equation $z^4-5z^2+4z+29=0$ qui donne par sa comparaison avec $z^4+pz^2+qz+r=0$; $p=-5$; $q=4$; $r=29$, & par conséquent la réduite $x^6-10x^4-91x^2-16=0$, laquelle en faisant $x^2=u+\frac{10}{3}$ se changera en $u^3-\frac{373}{3}u-\frac{10622}{27}=0$. Or comme cette Equation est de celles que la formule de l'art. VI ne sçauroit résoudre, c'est-à-dire de celles qui ont leurs trois racines réelles, il s'ensuit que les racines cherchées de l'Equation $z^4-5z^2+4z+29=0$ sont ou toutes

quatre réelles ou toutes quatre imaginaires. Et ſi on ſe rappelle qu'on a vû article XXXII. que lorſque les racines ſont toutes réelles, la réduite a le ſecond terme négatif, le troiſiéme poſitif, &c. on en conclura que la propoſée eſt dans le cas d'avoir toutes ſes racines imaginaires à cauſe que le troiſiéme terme $-91x^2$ de ſa réduite eſt négatif.

Mais par aucune méthode connue, on ne ſçauroit parvenir ainſi que dans l'exemple précédent à donner à ces quatre racines imaginaires, la forme ordinaire des racines imaginaires du ſecond dégré, parce que la réduite n'ayant aucun diviſeur commenſurable, la propoſée ne ſçauroit avoir ni des diviſeurs commenſurables, ni des diviſeurs affectés de ſimples radicaux du ſecond dégré.

XLIII.

Soit l'Equation $z^4 - 32zz - 16z - 2 = 0$. qui donne $p = -32$, $q = -16$, $r = -2$, & par conſéquent la réduite $x^6 - 64x^4 + 1032x^2 - 256 = 0$. Sixiéme exemple.

Cette réduite ayant, comme on peut aiſément s'en aſſurer, ſes trois racines réelles fait voir que la propoſée doit avoir toutes ſes racines réelles ou toutes imaginaires; on s'aſſurera facilement que c'eſt le premier de ces deux cas qui a lieu en ayant recours à l'article XXXII. Je cherche maintenant par la méthode des art. XII & XIII. de la troiſiéme Partie les diviſeurs de cette réduite, & je trouve

$xx-32$; qui au moyen de l'expreſſion générale $z = \pm \frac{1}{2}x \pm \sqrt{-\frac{1}{4}xx - \frac{1}{2}p \mp \frac{q}{2x}}$ donne pour les quatre racines cherchées . . . . $2\sqrt{2+\sqrt{8}+\sqrt{2}}$, $2\sqrt{2-\sqrt{8}+\sqrt{2}}$, $-2\sqrt{2+\sqrt{8}-\sqrt{2}}$, $-2\sqrt{2-\sqrt{8}-\sqrt{2}}$.

XLIV.

Septiéme exemple.

Soit préſentement l'Equation $z^4 - 18z^2 + z + 70 = 0$ qui donne la réduite $x^6 - 36x^4 + 44x^2 - 1 = 0$ ou $u^3 - 388u - 2929 = 0$; en faiſant évanouir le ſecond terme par le moyen de la transformée $x^2 = u + 12$.

Or comme cette Equation a ſes trois racines réelles, & que le ſecond terme $36x^4$ eſt négatif, tandis que le troiſiéme $44x^2$ eſt poſitif, il s'enſuit par l'article XXXII. que la propoſée a ſes quatre racines réelles; de plus la réduite n'ayant aucun diviſeur commenſurable, ainſi qu'on peut s'en aſſurer par la méthode des art. XII & XIII. de la troiſiéme Partie, il faut ſe contenter de trouver par approximation les racines cherchées.

Pour cela, on commencera par employer la méthode de l'article XXI. à la réſolution de l'Equation $u^3 - 388u - 2929 = 0$, & ayant trouvé 22, 74 pour la valeur de u, on ſubſtituera cette valeur dans $x = \sqrt{u+12}$, ce qui donnera 5, 894 pour x, & en ſubſtituant cette valeur de x dans . . . .

$z = \pm \frac{1}{2} x \sqrt{\pm - \frac{1}{4} xx - \frac{1}{2} p \mp \frac{q}{2x}}$, on aura pour les quatre racines cherchées; $+3, 426$; $+2, 467$; $-2, 315$; $-3, 579$ qui seront fort proches des vrayes; on en auroit eu de plus exactes si on avoit poussé plus loin la méthode de l'article XXI. pour résoudre l'Equation $u^3 - 388u = 2929$.

XLV.

Après avoir vû dans les résolutions des Equations, tant du second que du troisiéme & du quatriéme dégré, comment à l'aide des signes radicaux, on parvient à exprimer la valeur de l'inconnue dans ces Equations, il peut venir dans l'esprit de chercher comment on retrouveroit les Equations dont on connoît les racines par une expression radicale, on peut se proposer, par exemple, de sçavoir quelle est l'Equation dont la racine seroit $x = \sqrt[4]{ab^3} + \sqrt[3]{a^2 b} + \sqrt[3]{a^2 c}$; celle dans laquelle x seroit $\sqrt[3]{a^3 + b^3} - \sqrt[3]{a^3 - b^3}$ &c.

Pour résoudre tous les Problêmes de ce genre ou ce qui revient au même pour faire évanouir les radicaux d'une Equation quelconque, on s'y prendra de la maniere suivante qui étoit bien aisée à imaginer après ce qui a été enseigné dans la deuxiéme Partie, article XXXV.

On mettra à la place de chaque radical Maniere de

Faire évanouir les radicaux d'une Equation quelconque, une inconnue, & l'on aura par ce moyen;

1°. Au lieu de l'Equation donnée une nouvelle Equation qui ne contiendra plus de radicaux; 2°. Autant d'Equations à deux termes qu'il y avoit de radicaux dans l'Equation proposée. Or chacune de ces Equations à deux termes sera délivrée tout de suite de ses radicaux en élevant ses deux membres à la puissance indiquée par l'exposant du signe radical que l'un de ses deux termes contiendra. Donc il n'y aura plus qu'à chasser de toutes ces Equations délivrées de radicaux les inconnues introduites, opération que l'on a enseigné à l'article XXXV. de la seconde Partie.

Exemple. Pour éclaircir ce qu'on vient de dire par un exemple, soit proposé de faire évanouir les radicaux de l'Equation $x = \sqrt[3]{ab^2} + \sqrt[3]{add}$, ayant fait $\sqrt{ab^2} = y$ & $\sqrt{add} = z$, on aura les trois Equations $x = y + z$; $y^3 = ab^2$, $z^3 = ad^2$, tirant de la premiere $y = x - z$, & la substituant dans la seconde, on aura $x^3 - 3x^2z + 3xz^2 - z^3 = ab^2$, de laquelle, avec le secours de l'Equation $z^3 = ad^2$, il ne s'agit plus que de chasser z.

Pour cela, je commence par mettre dans la premiere de ces deux Equations $x^3 - 3x^2z + 3xz^2 - z^3 = ab^2$ à la place de z^3, ab^2 que donne la seconde; & elle devient $x^3 - 3x^2z + 3xz^2 - ad^2 = ab^2$, de laquelle je tire $z^2 = \frac{ad^2 + ab^2 - x^3 + 3x^2z}{3x}$: multipliant ensuite les deux membres de cette Equation par z, &

mettant à la place de z^3 ſa valeur ad^2 j'ai une nouvelle Equation . . . . $ad^2 = \frac{ad^2z+ab^2z-x^3z+3x^2zz}{3x}$ qui donne . . . $zz = \frac{3ad^2x-ad^2z-ab^2+x^3z}{3x^2}$.

J'égale alors ces deux valeurs de zz, & j'en tire une Equation où z n'eſt plus qu'au premier dégré, je la réſous & j'ai . . . $z = \frac{x^4+2ad^2x-ab^2x}{ab^2+ad^2+2x^3}$ qui étant ſubſtitué dans l'une des précédentes, par exemple dans $x^3-3x^2z+3xz^2-ad^2=ab^2$, donne enfin l'Equation $x^9-a^3d^2x^6-3ab^2x^6+3a^2b^4x^3+3a^2d^4x^3-21a^2d^2b^2x^3=a^3b^6+3a^3b^4d^2+3a^3d^4b^2+a^3d^6$, qui ne contient d'autre inconnnue que celle qui étoit dans la propoſée, & qui eſt délivrée de toute quantité radicale; on ſe tireroit de la même maniere de quelque Equation qu'on eût.

Quelquefois les Equations propoſées ſont ſi aiſées à délivrer des radicaux qu'il eſt inutile d'avoir recours à la méthode précédente, & qu'il ſuffit de tranſpoſer les termes & d'élever les deux membres à la puiſſance indiquée par le radical qui eſt ſeul alors dans un des membres; par exemple ſi on avoit l'Equation $x=y+\sqrt[3]{a^3}+\sqrt{a^5x}$, en paſſant y de l'autre côté, & élevant les deux membres à la troi-

ſiéme puiſſance, on aura une Equation qui ne contiendra plus d'autre radical que $\sqrt{a^5x}$ mettant alors ce terme ſeul d'un côté & élevant les deux membres au quarré, on aura une Equation qui ne contiendra plus de radicaux : & il en ſeroit de même dans beaucoup de rencontres.

FIN.



EXTRAIT DES REGISTRES de l'Académie Royale des Sciences.

Du 20. Juillet 1746.

MEssieurs NICOLE & BOUGUER qui avoient été nommés pour examiner *des Elemens d'Algebre* composés par Mr. Clairaut, en ayant fait leur rapport, la Compagnie a jugé cet Ouvrage digne de l'Impression, en foi de quoi j'ai signé le présent Certificat, à Paris ce 5. Août 1746.

GRANDJEAN DE FOUCHY.
Secrétaire perpétuel de l'Académie Royale des Sciences.

PRIVILEGE DU ROY.

LOUIS, par la grace de Dieu, Roi de France & de Navarre : A nos amés & féaux Conseillers, les Gens tenans nos Cours de Parlement, Maîtres des Requêtes ordinaires de notre Hôtel, grand Conseil, Prevôts de Paris, Baillifs, Sénéchaux, leurs Lieutenans Civils, & autres nos Justiciers, qu'il appartiendra, SALUT. Notre ACADEMIE ROYALE DES SCIENCES Nous a très-humblement fait exposer, que depuis qu'il Nous a plû lui donner par un Réglement nouveau de nouvelles marques de notre affection, Elle s'est appliquée avec plus de soin à cultiver les Sciences, qui sont l'objet de ses exercices ; ensorte qu'outre les Ouvrages qu'elle a déja donnés au Public, elle seroit en état d'en produire encore d'autres, s'il Nous plaisoit lui accorder de nouvelles Lettres de Privilége, attendu que celles que Nous lui avons accordées en datte du six Avril 1693. n'ayant point eû de tems limité, ont été déclarées nulles par un Arrêt de notre Conseil d'Etat, du 13. Août 1704. celles de 1713. & celles de 1717. étant aussi expirées; & désirant donner à notredite Académie en corps & en particulier, & à chacun de ceux qui la composent, toutes les facilités & les moyens qui peuvent contribuer à rendre leur travaux utiles au Public, Nous avons permis & permettons par ces Présentes à notredite Académie, de faire vendre ou débiter dans tous les lieux de notre obéissance, par tel Imprimeur ou Libraire qu'elle voudra choisir, *Toutes les Recherches ou Observations journalieres, ou Relations annuelles de tout ce qui aura été fait dans les assemblées de notredite Académie Royale des Sciences ; comme aussi les Ouvrages, Mémoires, ou Traités de chacun des Particuliers qui la composent, & généralement tout ce que ladite Académie voudra faire paroître, après avoir fait examiner lesdits Ouvrages, & jugé qu'ils sont dignes de l'impression ;* & ce pendant

le tems & espace de quinze années consécutives, à compter du jour de la date desdites Présentes. Faisons défenses à toutes personnes de quelque qualité & condition qu'elles soient, d'en introduire d'impression étrangére dans aucun lieu de notre obéissance : comme aussi à tous Imprimeurs-Libraires, & autres, d'imprimer, faire imprimer, vendre, faire vendre, débiter ni contrefaire aucun desdits Ouvrages ci-dessus spécifiés, en tout ni en partie, ni d'en faire aucuns extraits, sous quelque prétexte que ce soit, d'augmentation, correction, changement de titre, feuilles même séparées, ou autrement, sans la permission expresse & par écrit de notredite Académie, ou de ceux qui auront droit d'Elle, & ses ayans cause, à peine de confiscation des Exemplaires contrefaits, de dix mille livres d'amende contre chacun des Contrevenans, dont un tiers à Nous, un tiers à l'Hôtel-Dieu de Paris, l'autre tiers au Dénonciateur, & de tous dépens, dommages & intérêts : à la charge que ces Présentes seront enregistrées tout au long sur le Registre de la Communauté des Imprimeurs & Libraires de Paris ; dans trois mois de la date d'icelles ; que l'impression desdits Ouvrages sera faite dans notre Royaume & non ailleurs, & que notredite Académie se conformera en tout aux Réglemens de la Librairie, & notamment à celui du 10. Avril 1725. & qu'avant que de les exposer en vente, les Manuscrits ou Imprimés qui auront servi de copie à l'impression desdits Ouvrages, seront remis dans le même état, avec les Approbations & Certificats qui en auront été donnés, ès mains de notre très-cher & féal Chevalier Garde des Sceaux de France, le sieur Chauvelin : & qu'il en sera ensuite remis deux Exemplaires de chacun dans notre Bibliotheque publique, un dans celle de notre Château du Louvre, & un dans celle de notre très-cher & féal Chevalier Garde des Sceaux de France le sieur Chauvelin : le tout à peine de nullité des Présentes ; du contenu desquelles vous mandons & enjoignons de faire jouir notredite Academie, ou ceux qui auront droit d'Elle & ses ayans cause, pleinement & paisiblement, sans souffrir qu'il

leur ſoit fait aucun trouble ou empêchement : Voulons que la Copie desdites Préſentes qui ſera imprimée tout au long au commencement ou à la fin deſdits Ouvrages, ſoit tenue pour dûement ſignifiée, & qu'aux Copies collationnées par l'un de nos amés & féaux Conſeillers & Sécrétaires foi ſoit ajoutée comme à l'Original : Commandons au premier notre Huiſſier ou Sergent de faire pour l'exécution d'icelles tous actes requis & néceſſaires, ſans demander autre permiſſion, & nonobſtant clameur de Haro, Charte Normande & Lettres à ce contraires : Car tel eſt notre plaiſir. Donné à Fontainebleau le douziéme jour du mois de Novembre mil ſept cent trente-quatre, & de notre Regne le vingtiéme. Par le Roi en ſon Conſeil.

Signé, SAINSON.

Regiſtré ſur le Regiſtre VIII. de la Chambre Royale & Syndicale des Libraires & Imprimeurs de Paris, num. 792. fol. 775. conformément aux Reglemens de 1723. qui font défenſes, Art. IV. à toutes perſonnes de quelque qualité & condition qu'elles ſoient, autres les Libraires & Imprimeurs, de vendre, débiter & afficher aucuns Livres pour les vendre en leur nom, ſoit qu'ils s'en diſent les Auteurs ou autrement, & à la charge de fournir les Exemplaires preſcrits par l'Art. CVIII. du même Réglement. A Paris le 15. Novembre 1734.

G. *MARTIN, Syndic.*



TABLE DES MATIERES.

PREMIERE PARTIE.

De la Méthode Algébrique d'exprimer les Problêmes par des Equations, & de la résolution des Equations du premier dégré.

SECONDE PARTIE.

De la résolution des Equations du second dégré.

TROISIE'ME PARTIE.

Où l'on donne quelques principes généraux pour les Equations de tous les dégrés, avec la méthode de tirer de ces Equations, celles du premier & du second dégré qu'elles peuvent renfermer.

QUATRIE'ME PARTIE.

Réſolution des Equations de dégrés quelconques lorſqu'elles n'ont que deux termes, ou lorſqu'en ayant trois elles peuvent ſe réduire à celles qui n'en ont que deux par la méthode des Equations du ſecond dégré, avec différentes opérations néceſſaires pour ces Equations, comme l'extraction des racines, la réduction des quantités radicales &c.

CINQUIE'ME PARTIE.

Résolution des Equations du troisiéme & du quatriéme dégré.

Fin de la Table.

FAUTES A CORRIGER.

Corrigé PAge 3 à la seconde apostille au lieu de × mettés +.

~~4 lig. 5, $-\frac{3}{2}x$ lisés $-\frac{2}{3}x$.~~

lig. 11, *changé*, lisés *changée*.

7 lig. 6, $2x + x + \frac{1}{3}x$, lisés $2x + \frac{1}{3}x$.

lig. 12, 1800, lisés 180.

lig. 26, $\frac{15960}{7} = 228$, lisés $\frac{15960}{7} = 2280$.

lig. 30, 3326, lisés 3220.

13 lig. 6, 22, 23, 24 au lieu de 53200 lisés 5320.

14 lig. 10, 359, lisés 399.

lig. 13, $\frac{2}{3}$, lisés $\frac{2}{9}$.

18 lig. 11, $\frac{2x+6}{3}$, lisés $\frac{2x+16}{3}$.

lig. 12, $x-3$, lisés $\frac{x-3}{2}$.

lig. derniere $+2$, lisés $+8$.

19 à la fin de la premiere ligne ajoutés *le*.

21 lig. 16, changés réciproquement les mots *heures & lieues*.

26 lig. 5 & 6 changés réciproquement les mots *second & premier*.

lig. 10, *ajoute*, lisés *ajouté*.

27 lig. 19, au lieu de 41, lisés 21.

lig. 23, $\frac{5}{3}$, lisés $\frac{5}{7}$.

~~28 lig. 9, *on*, lisés *ou*.~~

34 lig. 20, *tres*, lisés *autres*.

37 lig. 27, *ac*, lisés *3ac*.

40 lig. 8, *2b*, lisés *b*.

46 lig. 9, par *c*, lisés par *dc*.

lig. 30, $-ax$, lisés $-ac$.

47 l. 21, $2a^3c^2 - 5a^4b$, lisés $2a^3c^2 - 5a^4b + 6a^5$

lig. derniere $2a^3c$, lisés $2a^3c^2$.

48 lig. 19. $5a^4b$, lisés $-5a^4b$.

53 lig. 4, $-ac$, lisés $-ac^2$.

56 lig. 20, $10ba^3$, lisés $-10ba^3$.

57 lig. antepenultiéme $24b^2$, lisés $24b^4$.

59 lig. 16, $2acd$, lisés $2acd^2$.

67 lig. derniere $-f$, lisés $-af$.

68 lig. 1, 200, lisés 300.

lig. 20, $-\frac{1}{3}y$, lisés $-\frac{7}{3}y$.

lig. 22, $\frac{7}{2}y$, lisés $\frac{7}{3}y$.

74 lig. 7. $\frac{28}{7}$, lisés $\frac{258}{7}$.

79 lig. 9. au diviseur au lieu de $-mpq$, lisés $-mp^3q$.

82 aux deux dernieres lignes au lieu de $\frac{C}{D}$, lisés $\frac{D}{C}$.

87 lig. 12, $-2q^2$ lisés $-2q^3$.

89 lig. 24, $-\overline{dd} - cc$, lisés $-\overline{dd - cc}$.

90 lig. 14, $\overline{4ca - 4aa} \times d$, lisés $\overline{4aa - 4ca} \times d$.

lig. 21, $4ad + 2cc$, lisés $-4ad + 2cc$.

93 lig. 10, ez, lisés cz.

101 lig. 8, $a \times \overline{1 - \frac{x^2}{000}}$, lisés $a \times \overline{1 - \frac{x}{100}}^2$.

lig. 13, $a \times \overline{1 - \frac{x}{100}} - b$ qui se réduit à $x - 100x$, lisés $a \times \overline{1 - \frac{x}{100}} - b$ qui se réduit à $x^2 - 100x$.

102 lig. 4, $-1000000\frac{b}{a}$, lisés $1000000\frac{b}{a}$

104 lig. 6, c'est-à-dire $\frac{1}{2}p$, lisés c'est-à-dire $\frac{1}{4}p^2$.

lig. 9, $x - \frac{1}{2}p$, lisés $x + \frac{1}{2}p$.

105 lig. avant derniere $q + {}^{1}p^{2}$, lisés $q + \frac{1}{4}p^{2}$.

106 lig. 7. $\sqrt{}\, q + \frac{1}{4}p^{2}$, lisés $\sqrt{q + \frac{1}{4}p^{2}}$.

112 lig. 1 $\frac{aamm}{n-m}$ lisés $\frac{aamm}{\overline{n-m}^{2}}$

lig 17, $\frac{d}{n-m} \times \overline{-n + \sqrt{nm}}$ lisés ......

$\frac{a}{n-m} \times \overline{-m \pm \sqrt{mn}}$.

167 à la derniere apostille, au lieu de lorsque l'x, lisés lorsque l'x^{2}.

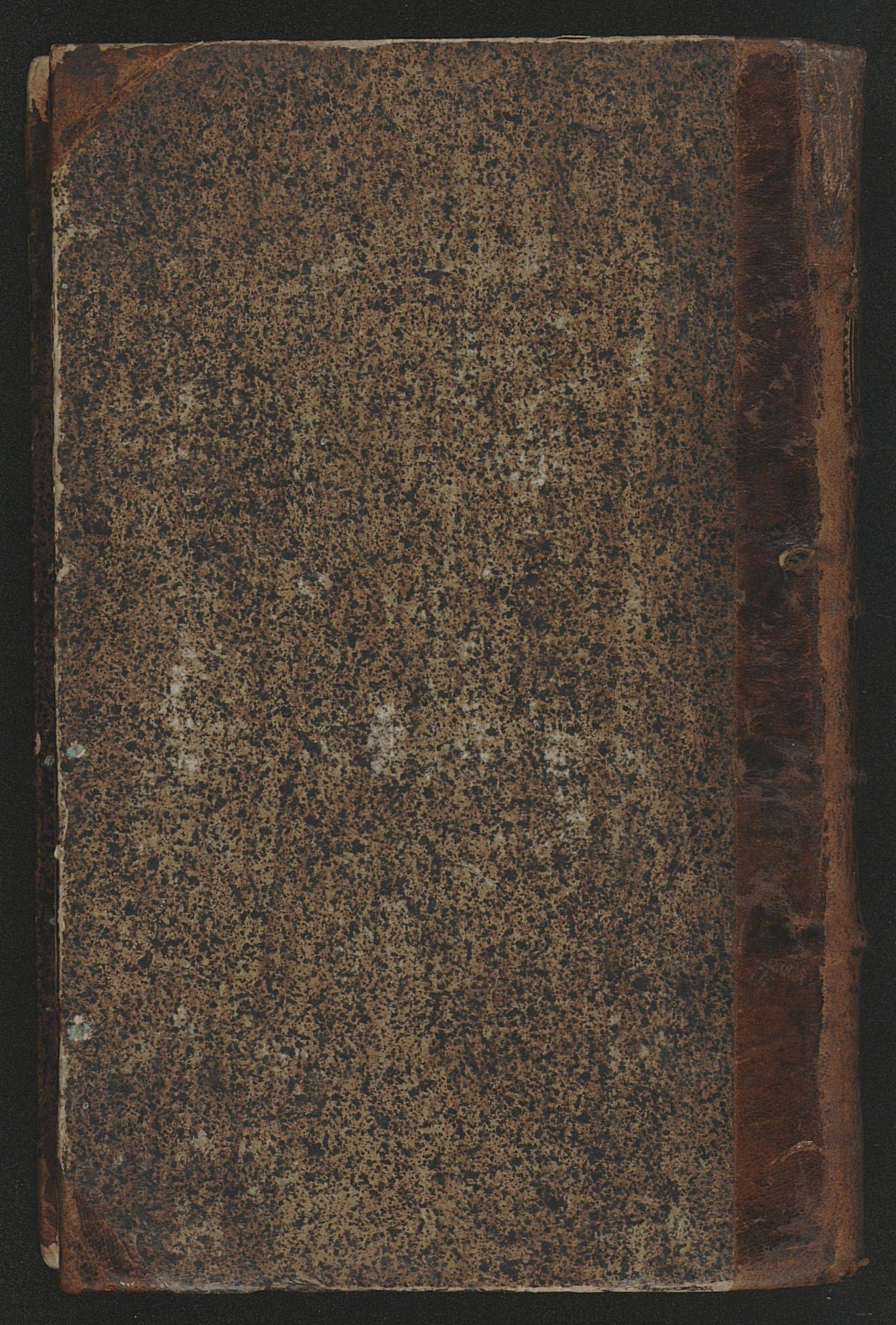
253 avant derniere ligne ôtés le $+$ qui est audessus de z^{3}, il doit être devant l'&c.

266 à l'apostille au lieu de pu, lisés px.

275 à l'apostille au lieu de $\frac{1}{2}qq$, lisés $\frac{1}{4}qq$.

285 lig. 21 *où*, lisés *ou*.

De l'Imprimerie de la Veuve DELATOUR, 1746.




CLAIRAUT
ELEMENS
D'ALGEBRE



inches 4 3 2 1 0 — 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 centimeters

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11 (A)	12	13	14	15
L*	39.12	65.43	49.87	44.26	55.56	70.82	63.51	39.92	52.24	97.06	92.02	87.34	82.14	72.06	62.15
a*	13.24	18.11	-4.34	-13.80	9.82	-33.43	34.26	11.81	48.55	-0.40	-0.60	-0.75	-1.06	-1.19	-1.07
b*	15.07	18.72	-22.29	22.85	-24.49	-0.35	59.60	-46.07	18.51	1.13	0.23	0.21	0.43	0.28	0.19
Density										0.04	0.09	0.15	0.22	0.36	0.51

	16 (M)	17	18 (B)	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
L*	49.25	38.62	28.86	16.19	8.29	3.44	31.41	72.46	72.95	29.37	54.91	43.96	82.74	52.79	50.87
a*	-0.16	-0.18	0.54	-0.05	-0.81	-0.23	20.98	-24.45	16.83	13.06	-38.91	52.00	3.45	50.88	-27.17
b*	0.01	-0.04	0.60	0.73	0.19	0.49	-19.43	55.93	68.80	-49.49	30.77	30.01	81.29	-12.72	-29.46
Density	0.75	0.98	1.24	1.67	2.04	2.42									

D50 Illuminant, 2 degree observer

Density ⟶

Golden Thread

Colors by Munsell Color Services Lab

Don Williams